Analyse Numérique Licence L3 MASS, TP4

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivante :

$$f(x) = e^{-\cos(x)} + x - 1$$

On va calculer numériquement $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tel que $f(\bar{x}) = 0$ par un algorithme de point fixe puis par l'algorithme de Newton.

(1) Programmer la fonction f et la tracer avec la commande plot sur l'intervalle $\Big[-10, 10\Big]$ avec un espacement de 0.1 des points.
(2) Calculer et programmer la fonction f' qui pourra être notée fp

(3) **Algorithme de point fixe**.

Pour $a \in \mathbb{R}$ donné tel que $f'(a) \neq 0$, on considère la fonction g telle que

$$g(x) = x - f(x)/f'(a)$$

de sorte qu'un zéro de f est un point fixe de g. On considère l'algorithme de point fixe suivant : $x^{(0)} \in \mathbb{R}$ et

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}),\ k \in \mathbb{N}.$$

(3.1) Programmer la fonction g (utiliser $fp(a)$ avec a en variable globale).
(3.2) Programmer l'algorithme de point fixe :
— Choix de la précision $\epsilon = 10^{-14}$ sur le résidu relatif
— Initialisation : $x^{(0)} \in \mathbb{R}$, $r^{(0)} = g(x^{(0)}) - x^{(0)}$, $nr^{(0)} = |r^{(0)}|$, $k = 0$
— Tant Que $\frac{nr^{(k)}}{nr^{(0)}} > \epsilon$ Faire
$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) = x^{(k)} + r^{(k)}$
$r^{(k+1)} = g(x^{(k+1)}) - x^{(k+1)}$
$nr^{(k+1)} = |r^{(k+1)}|$
$k = k + 1$
— End Tant Que
— $nit = k$
(3.3) Tracer la courbe $log(\frac{nr^{(k)}}{nr^{(0)}})$ fonction de k. Que pouvez vous dire sur la convergence de cet algorithme ? Tester différentes valeurs du point de départ $x^{(0)}$ et du paramètre a du point fixe. On note $\bar{x}$ le zéro de f. Tester la valeur de $g'(\bar{x})$? Quelle condition sur $g'(\bar{x})$ doit-on vérifier pour obtenir la convergence locale de l'algorithme de point fixe ? Tester $a = \bar{x}$, que constatez vous ? pourquoi ?

(4) **Algorithme de Newton**.

(4.1) Programmer l'algorithme de Newton suivant :
— Choix de la précision $\epsilon = 10^{-14}$ sur le résidu relatif
— Initialisation : $x^{(0)} \in \mathbb{R}$, $r^{(0)} = f(x^{(0)})$, $nr^{(0)} = |r^{(0)}|$, $k = 0$
— Tant Que $\frac{nr^{(k)}}{nr^{(0)}} > \epsilon$ Faire

$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{1}{f'(x^{(k)})} r^{(k)}$
$r^{(k+1)} = f(x^{(k+1)})$
$nr^{(k+1)} = |r^{(k+1)}|$
$k = k + 1$

— End Tant Que
— $nit = k$

(4.2) Tracer la courbe $log(\frac{nr^{(k)}}{nr^{(0)}})$ fonction de k et comparer la convergence de l'algorithme de Newton à celle du point fixe précédent. Tester différentes valeurs du point de départ $x^{(0)}$, que constatez vous ? Vérifier que $f'(\bar{x}) \neq 0$, que pouvez vous en conclure sur la convergence de l'algorithme de Newton ?