

Réduction des endomorphismes

Endomorphismes nilpotents.

5. ENDOMORPHISMES NILPOTENTS

Un endomorphisme est *nilpotent* s'il existe une puissance de u qui est l'endomorphisme nul. Le plus petit des entiers $s \geq 1$ tel que $u^s = 0$ dans $\text{End}(E)$ est l'indice de nilpotence de u . C'est dire que si l'indice de nilpotence de u est N , le polynôme minimal de u est X^N et u^{N-1} n'est pas l'endomorphisme nul.

On voit donc que la seule valeur propre de u est 0, l'espace propre associé étant le noyau de u qui n'est donc pas réduit à $\{0\}$.

EXERCICE 5.1. Soit E de dimension finie n sur k et $u \in \text{End}(E)$. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) u est nilpotent.
- (2) le polynôme caractéristique de u est scindé et u a 0 comme seule valeur propre.

En déduire que l'indice de nilpotence d'un endomorphisme est au plus égal à n .

Si u est nilpotent d'indice $N \geq 1$, alors u^{N-1} n'est pas l'endomorphisme nul ; il existe au moins un vecteur x de E tel que $u^{N-1}(x) \neq 0$.

Lemme 5.2. *Le système $(x, u(x), \dots, u^{N-1}(x))$ est un système libre de E qui engendre un sous-espace vectoriel $F \subset E$ stable par u . La restriction $u|_F$ est un endomorphisme nilpotent de $\text{End}(F)$ d'indice de nilpotence N . Sa matrice dans la base $(u^{N-1}(x), \dots, u(x), x)$ de F est*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On appelle un telle matrice triangulaire supérieure, bloc de Jordan de taille N et de valeur propre 0.

Démonstration. Considérons une combinaison linéaire non triviale $y = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i u^i(x)$. Supposons que les α_i ne sont pas tous nuls et appelons i_0 le premier indice i tel que $\alpha_i \neq 0$. Si on applique u^{N-i_0-1} à y , on trouve $u^{N-i_0-1}(y) = \alpha_{i_0} u^{N-1}(x)$ qui n'est pas nul. On en déduit que y n'est pas nul. La première assertion du lemme est démontrée. Prouver les suivantes. \square

Notre but est de prouver qu'il existe un supplémentaire de F lui aussi stable par u . Pour cela, on va utiliser

la dualité (prop. 4.4). Tout d'abord, il existe une forme linéaire f qui ne s'annule pas sur $u^{N-1}(x)$ (corollaire 4.10). On en déduit que, d'après la définition du transposé :

$$0 \neq \langle f, u^{N-1}(x) \rangle = \langle {}^t u^{N-1}(f), x \rangle$$

Il s'ensuit que l'endomorphisme ${}^t u^{N-1}$ n'est pas nul dans $\text{End}(E^*)$. Mais, d'après les propriétés de composition des transposés ${}^t u^j = ({}^t u)^j$ pour tout entier j . On en déduit d'une part que $({}^t u)^N = 0$, d'autre part que $({}^t u)^{N-1} \neq 0$, ce qui signifie que ${}^t u$ est nilpotent d'indice N exactement.

De manière analogue à ce que nous avons fait pour u , on en déduit que $G := \text{Vect}(f, {}^t u(f), \dots, {}^t u^{N-1}(f))$ est un sous-espace de dimension N de E^* qui est stable par ${}^t u$.

Lemme 5.3. *L'orthogonal de G dans E est un supplémentaire de F stable par u . La restriction de u à ce sous-espace est nilpotente d'indice de nilpotence au plus égal à celui de u .*

Démonstration. On sait, d'après la proposition 4.13 que G^\perp est stable par u . Comme $u^N = 0$ dans $\text{End}(E)$, la restriction de u à G^\perp vérifie $(u|_{G^\perp})^N = 0$. On sait aussi que l'orthogonal G^\perp est de dimension $n - N$. C'est un supplémentaire de F si et seulement si $F \cap G^\perp = \{0\}$. Un élément y non nul de F se décompose en $y = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i u^i(x)$ avec des α_i non tous nuls. Appelons i_0 le premier indice i tel que $\alpha_i \neq 0$. Si y est aussi dans G^\perp il est annulé en particulier par ${}^t u^{N-i_0-1}(f)$ et on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle {}^t u^{N-i_0-1}(f), y \rangle = \langle f, u^{N-i_0-1}(y) \rangle \\ &= \langle f, \alpha_{i_0} u^{N-1}(x) \rangle = \alpha_{i_0} \langle f, u^{N-1}(x) \rangle \end{aligned}$$

ce qui est impossible, d'après la propriété de f . On a donc obtenu une contradiction et $F \cap G^\perp = \{0\}$. \square

Théorème 5.4 (Décomposition de Jordan des endomorphismes nilpotents). *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur k et u un endomorphisme nilpotent. Il existe une décomposition en somme directe de sous-espaces stables par u*

$$E = \bigoplus_{i=1}^s E_i$$

telle que, pour tout i , $1 \leq i \leq s$, il existe un vecteur $x_i \in E_i$ dont les transformés successifs par les puissances de u engendrent E_i .

Si on note N_i la dimension de E_i , la restriction $u|_{E_i}$ est un endomorphisme nilpotent d'indice N_i . Sa matrice dans la base $(u^{N_i-1}(x_i), \dots, x_i)$ est un bloc de Jordan de taille N_i et de valeur propre 0. L'entier $N = N_1 = \max(N_1, \dots, N_s)$ est l'indice de nilpotence de u .

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de E . Si la dimension est 0, il n'y a rien à faire. Sinon on trouve, d'après les lemmes 5.2 et 5.3, une décomposition $E = F \oplus G^\perp$ en sous-espaces stables par u . La restriction $u|_F$ est, par construction, d'indice de nilpotence N égal à l'indice de nilpotence de u . On pose $E_1 = F$ et on suppose, par hypothèse de récurrence, que le théorème est vrai pour la restriction de u à G^\perp qui est nilpotente d'indice au plus égal à celui de u . Le théorème est alors démontré pour E . \square

Voyons maintenant comment la suite d'entiers $N_1 \geq \dots \geq N_s$ est uniquement déterminée par u . Nous avons déjà remarqué que la taille du plus grand bloc de Jordan, $N = N_1 = \max(N_1, \dots, N_s)$, est l'indice de nilpotence de u .

Rappelons que chaque sous-espace E_i est engendré par une base $(u^{N_i-1}(x_i), \dots, x_i)$. La réunion de ces bases est une base de E que nous notons \mathcal{B} .

Combien y a-t-il de blocs de Jordan? Autant que de vecteurs de \mathcal{B} de la forme $u^{N_i-1}(x_i)$. Ces vecteurs forment une base \mathcal{B}_1 du noyau de u (le vérifier). Le nombre s de blocs de Jordan est donc la dimension du noyau de u .

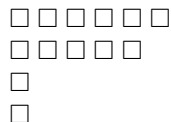
Combien y a-t-il de blocs de Jordan de taille au moins 2? Autant que de vecteurs de \mathcal{B} de la forme $u^{N_i-2}(x_i)$ qui, ajoutés à \mathcal{B}_1 forment une base \mathcal{B}_2 du noyau de u^2 (le vérifier). Le nombre de blocs de Jordan de taille au moins 2 est donc

$$\dim(\ker u^2) - \dim(\ker u)$$

En déduire la preuve de la proposition suivante :

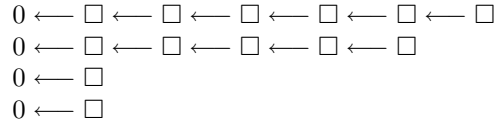
Proposition 5.5. *Sous les hypothèses du théorème, la donnée de la suite $N_1 \geq \dots \geq N_s$ des tailles des blocs de Jordan de u est équivalente à la donnée de la suite des dimensions des noyaux $\dim(\ker u) \leq \dim(\ker u^2) \leq \dots \leq \dim(\ker u^N) = n$. La suite $N_1 \geq \dots \geq N_s$ est donc uniquement déterminée par u .*

EXERCICE 5.6. On convient de représenter la suite $N_1 \geq \dots \geq N_s$ par un tableau comme ci-dessous dont la ℓ -ème ligne comporte N_ℓ cases.



On peut considérer que les cases du tableau indexent les vecteurs de la base \mathcal{B} . On peut voir l'action de u sur ces vecteurs comme une translation de 1 case vers la case voisine à gauche sur la même ligne, les cases de la première

colonne étant associées à des vecteurs du noyau envoyés sur 0 par u . De manière analogue à l'exemple 2.6.1 on pourrait schématiser l'action de u sur les vecteurs de \mathcal{B} par :



Montrer que le nombre de cases dans la j -ème colonne du tableau est le nombre de blocs de Jordan de taille au moins j . Exprimer les dimensions des noyaux des puissances de u à l'aide du tableau.

Décrire la matrice de u dans la base \mathcal{B}' obtenue en prenant les vecteurs de \mathcal{B} de la première colonne du tableau à partir du bas, puis ceux de la deuxième colonne à partir du bas, etc.

Donnons le théorème équivalent pour les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(k)$.

Théorème 5.7 (Décomposition de Jordan des matrices nilpotentes). *Soit A une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(k)$. Il existe une matrice inversible P de $\text{GL}_n(k)$ telle que*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{N_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{N_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{N_s} \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonale par blocs, où les matrices J_{N_ℓ} , $1 \leq \ell \leq s$ sont des blocs de Jordan de taille N_ℓ et de valeur propre 0. Les entiers $N_1 \geq \dots \geq N_s$ sont uniquement déterminés par A .

Corollaire 5.8. *Deux matrices nilpotentes A et B étant données dans $\mathcal{M}_n(k)$, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice P dans $\text{GL}_n(k)$ telle que $B = P^{-1}AP$ est que A et B définissent la même suite d'entiers $N_1 \geq \dots \geq N_s$.*

Démonstration. A et B ont alors même forme normale de Jordan. \square

Remarque. Un endomorphisme nilpotent est diagonalisable si et seulement si il est nul, autrement dit d'indice de nilpotence 1. Réciproquement, un endomorphisme nilpotent d'indice $n \geq 2$ n'est *jamais* diagonalisable.