L1

Analyse 1 : Calculus

Inégalités, majorations
Brièvement : limite fonction, fonction continue, dérivable ($f(x + h) = f(x) + f'(x)h + h\varepsilon(h)$),
Admis : Rolle, Valeur intermédiaire, Accroissements finis.
Équivalents et infiniment petits. Formule de Taylor (une variable), développements limités, applications aux limites.
Fonctions de 2 ou 3 variables : dérivées partielles, courbes de niveau.
Représentation graphique, courbes, courbes de niveau, surfaces. Etude points cols,...
Intégrale des fonctions continues sur [a, b], lien entre intégrale et primitive, intégration par parties, changement de variable.

Algèbre 1 : Premiers contacts avec l'algèbre linéaire.

Espaces vectoriels numériques et abstraits. Matrices et applications linéaires
Systèmes linéaires, méthode de Gauss.
Déterminants, rang, bases et dimensions. Images et noyaux.
Changements de bases.
Nombre complexes. Géométrie affine.
Espaces euclidiens, orthogonalité.

Mathématiques discrètes.

Logique : tables de vérité, quantificateurs, preuves.
Entiers : récurrence.
Ensembles : cardinal, parties, applications, permutations.

Option Math 1 : Nombres réels

Rappels sur les entiers naturels et la division euclidienne ; développement en base b.
Rappels sur la décomposition en facteurs premiers.
Rappels sur les rationnels, et le fait que 2 n'est pas un carré dans **Q**.
Introduction aux nombres réels : densité de **Q** dans **R**, propriété de la borne supérieure.
Notion de limite d'une suite, théorèmes de base sur le sujet, notion de fonction continue, théorème des valeurs intermédiaires.
Développement d'un réel en base b.

<u>Analyse 2</u> : Suites, Séries et Intégrales.

Suites numériques. Suites récurrentes.
Intégrales impropres.
Séries numériques.
Séries de fonctions, convergence normale, continuité, dérivabilité
Séries entières.
Séries de Fourier.

<u>Option Math 2</u> : Arithmétique

Fractions continues : Définition. Exemples culturels. Algorithmes, Réduites et approximations rationnelles. Nombres irrationnels quadratiques.

Equations diophantiennes :
Pythagore : $x^2+y^2=z^2$
Fermat (degré 4) $x^4+y^4=z^4$
Pell : $x^2-dy^2=1$ ou -1
Sommes de deux carrés
Quaternions
Sommes de 4 carrés

<u>Algèbre 2</u> : Algèbre linéaire.
Déterminant. Vecteurs propres et valeurs propres d'une matrice. Diagonalisation.
Produit scalaire. Espaces euclidiens. Orthogonalité. Projection orthogonale.
Réduction d'une matrice symétrique réelle et d'une matrice hermitienne.

<u>Statistiques</u>. Statistique et représentation des données

Statistique descriptive élémentaire:
- Vocabulaire de la statistique descriptive (quantitatif, qualitatif, population, échantillon etc.)
- Différentes représentations graphiques (diagramme en bâton, histogramme, camembert, etc.). Interprétation.
- Problème de regroupement des données dans la constitution d'histogramme
- calcul d'indicateurs statistiques: moyenne, médiane, variance, quartiles. Interprétation de ces indicateurs;

Liaison entre variables
- cas de variables quantitatives : calcul de covariance et de corrélation
- Régression linéaire d'une variable quantitative sur une autre. Prévision. Exemples.
- cas de variables qualitatives : Table de contingences. Distance du Chi-deux. Interprétation.
- Cas d'une variable qualitative et d'une variable quantitative: variances inter et intra groupes.

<u>L2</u>

<u>Analyse 3</u>

Fonctions continues, lipschitziennes, monotones, convexes, réciproques
Etude des fonctions usuelles (exp, ln, ch, sh, th, Arcsin, Arcos, Arctan)
Calcul de séries et d'intégrales avec décomposition en éléments simples
Suites de fonctions, étude précise.
Séries de fonctions, convergence uniforme, permutation entre intégrale et somme d'une série.
Continuité et dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale.
Comparaisons séries-intégrales.
Séries de Fourier (suite).

<u>Option Math 3</u> : Compléments d'algèbre et d'analyse

1. Théorie des ensembles.
Applications (injectives, surjectives, bijectives). Dénombrabilité.

Lois de composition (associatives, commutatives, distributives).
Algèbres booléennes. Fonctions caractéristiques.

2. Séries formelles.
L'anneau des séries formelles à coefficients complexes.
Développement en série entière des fonctions e^x, sin(x), cos(x), (1+x)^r.
Solutions formelles d'équations différentielles.

3. Calcul matriciel.
Matrices diagonalisables. Polynôme caractéristique d'une matrice.
Déterminant et trace d'une matrice.
L'exponentielle d'une matrice.

4. Équations différentielles.
Équations différentielles linéaires.
Équations différentielles du second ordre.

Algèbre et arithmétique 1 : Entiers, anneaux, groupes.

Arithmétique : **Z**, congruences modulo *n*, *pgcd, ppcm*, Euclide, Bézout, fonction d'Euler, théorème chinois.
Anneaux : idéaux, morphismes. **Z**/n**Z**.
Polynômes : Irréductibilité. Anneaux intègres. Anneaux principaux.
Corps : caractéristique.
Groupes : sous-groupes, morphismes, ordres, Lagrange, Fermat. Groupes cycliques.
Groupes de matrices. Groupe symétrique *S_n*, cycles, nombre d'inversions, signature.
Actions de *S_n.*

Calcul différentiel 1

Topologie dans $\mathbf{R}^2$
Fonctions de 2 variables, dérivées partielles, différentielle.
Minima, Extrema, D^2f, $\partial x\ \partial y\ f = \partial y\ \partial x\ f$.
Etude de points selles.
Courbes paramétrées
Exemples d'équations différentielles.

Intégrales multiples.

<u>Géométrie</u>

Géométrie affine, barycentres, parties convexes.
Géométrie euclidienne, réduction des isométries en dimension 2 et 3,
Décomposition en produit de réflexions.
Similitudes.
Droites, plans, cercles et sphères ; équations ; angles de droites, de plans ; puissance d'un point par rapport à un cercle, pinceaux linéaires.
Coniques et quadriques.

<u>Probabilités 1</u>.

Notion d'événements aléatoires. Dénombrement. Lien entre probabilité et fréquence d'un événement.
- Notion de variables aléatoires discrètes. Exemples des lois de Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson et ce que ces lois modélisent: du jeu pile ou face (truqué et non truqué), jeu de dé (truqué et non truqué), événements rares. Formules de calcul de probabilités, d'espérances et de variances, pour des variables aléatoires discrètes.
- Notion de densité de probabilité. Exemple de la loi uniforme, exponentielle, gaussienne et ce que ces lois modélisent: tirage aléatoire uniforme, durée de vie, erreurs de mesures. Formule de calcul de probabilité, d'espérance, de variance, avec des lois à densité.
- Inégalités de Bienaymé-Tchebycheff et Markov. Notion de fonction de répartition, fonction génératrice, caractéristique.
- Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Notion de covariance entre variables aléatoires.
- Théorème limites: loi des grands nombres, théorème centrale limite.
- Notions de probabilités conditionnelles.

Méthodes numériques et formelles

Méthodes numériques
- Calcul en virgule flottante.
- Résolution d''équations non linéaires.
- Intégration numérique.
- Interpolation et approximation.
- Équations différentielles.
- Systèmes d''équations linéaires.

Méthodes formelles
Initiation au logiciel de calcul formel Maple.
Les fonctions de base de la bibliothèque d''algèbre linéaire.
Résolution de problèmes d''algèbre linéaire : calcul de noyau, d''image d''une application linéaire, appartenance d''un vecteur
au sous-espace engendré par d''autres vecteurs, vecteurs propres et valeurs propres, ...
Mêmes problèmes mais pour des vecteurs ou des matrices dépendants d''un paramètre ce qui engendre une discussion.
Applications de l''algèbre linéaire : interpolation polynomiale, polynomiale par morceaux, suites récurrentes.

L3

Calcul Intégral

Ensembles dénombrables (exemple, N, Z, Q, N^n etc.)
- Espace mesurable. Notion de tribus (tribu borelienne, tribu engendrée par une classe d'ensembles). Notion de mesures positives : exemples de la mesure de comptage, de la mesure de Lebesgue, de mesure de probabilité.
- Fonctions mesurables. Cas des fonctions étagées. Approximation des fonctions mesurables par des fonctions étagées.
- Intégration de fonctions positives par rapport à une mesure. Théorème de convergence monotone, Lemme de Beppo Levi.
- Fonctions intégrables. Théoreme de convergence dominée.
- Etude d'intégrales dépendant d'un paramètre (définition, continuité, dérivabilité,...). Exemple de la transformée de Laplace.
- Mesure produit. Théorèmes de Fubini. Exemple de calcul d'aire.
- Formule de changement de variables.
- Espaces de Banach L_p et l_p. Cas p=1, 2, infini. Inégalités de Hölder et Minkowski. Densité des fonctions continues à support compact. Exemple de la convolution comme outil de régularisation.
- Transformée de Fourier.

Calcul différentiel 2

Topologie dans $\mathbf{R}^n$. Normes équivalentes, Compacité
Différentielle dans $\mathbf{R}^n$, notion de difféomorphisme.
Formule de Taylor, Extrema.
Inversion locale, Fonctions implicites.

Analyse Numérique

Résolution de systèmes linéaires : conditionnement d'une matrice ; décomposition LU.
Méthodes itératives : convergence de méthodes itératives ; résolution itérative d'un système linéaire ; la méthode de Newton.
Calculs des valeurs et vecteurs propres : méthode de la puissance ; méthode QR.
Interpolation polynomiale : interpolation de Lagrange ; formule de Newton et différences divisées.
Intégration numérique : formule d'erreur de Péano ; formules de Newton-Cotes ; polynômes orthogonaux et quadrature de Gauss.
Résolution numérique des équations différentielles ordinaires : méthodes à un pas, ordre, stabilité et convergence ; formules de Runge-Kutta ; méthodes à pas multiples.

Variable Complexe

Séries entières, Fonctions analytiques, Zéros isolés
Fonctions holomorphes, Formule de Cauchy
Prolongement analytique
Rudiments sur : Intégrale curviligne, homotopie
Points singuliers, Résidus
Construction de fonctions analytiques au moyen de séries, produits infinis et intégrales.
Fonctions Gamma, Zêta.

Algèbre et Géométrie

Endomorphismes nilpotents ; sous-espaces caractéristiques ; décomposition de Dunford ; polynôme minimal.
Dual d'un espace vectoriel ; application transposée.
Formes quadratiques, formes bilinéaires symétriques (hermitiennes) ;

Orthogonalité ; projection orthogonale, endomorphismes normaux, symétriques (hermitiens), orthogonaux (unitaires) d'un espace euclidien (hermitien) ; diagonalisation éventuelle ; réduction simultanée.

Équations différentielles

Equations différentielles linéaires en dim 1, systèmes différentiels (réduction).
Etude qualitative d'équations différentielles non linéaires $x'(t) = f(x(t))$
Th d'existence pour $y' = f(t, y)$, prolongements, théorème des bouts.
EDP linéaire du premier ordre.

Algèbre effective appliquée

Arithmétique sur les entiers
Calculs de pgcd, relation de Bézout et applications.
Calculs dans Z/nZ, éléments inversibles, ordre d'un élément.
Calcul rapide de puissances modulaire, complexité en temps et en taille.
Tests de primalité, algorithmes de factorisation, codes secrets.

Arithmétique sur les polynômes
Calculs de pgcd, relation de Bézout et applications.
Quelques thèmes choisis parmi les suivants :
Localisation des racines réelles d'un polynôme.
Calcul dans les extensions algébriques, extensions successives.
Polynômes symétriques des racines d'un polynôme donné.
Décomposition d'un polynôme en produit de polynômes sans facteur multiple.
Factorisation d'un polynôme à coefficients dans Z/pZ.

Algèbre et arithmétique 2 : Racines modulo *n*, racines de polynômes.

Structures quotients : anneaux, espaces vectoriels, sous-groupe distingué, groupe quotient.
Groupes cycliques et racines. $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$.
Polynômes symétriques, résultants, discriminants.
Polynômes irréductibles dans $\mathbf{Z}[X]$ et $\mathbf{Q}[X]$.
Nombres algébriques. Polynôme minimal. Extensions finies.
Corps de rupture et de décomposition.
Corps finis.

Histoire des mathématiques

Cette unité s'adresse aux étudiants désireux de mieux connaître le développement historique de leur discipline. L'enseignement dispensé s'attachera à replacer les découvertes mathématiques dans leur cadre historique en retraçant le cheminement des idées qui les ont rendues possibles. Des textes originaux seront étudiés et commentés en Travaux dirigés.

Les thèmes abordés pourront varier. Par exemple, dans les années passées, on a traité :
- Les équations algébriques de la Renaissance italienne au XIXème siècle (Arnaud Beauville).
- Les Principia de Newton et la naissance de la science du mouvement (Pierre Coullet).
- La sommation des séries de Zénon à Euler (Marc-Antoine Coppo).

Probabilités 2.

- Espace de probabilité, notion de variables aléatoires. Lien avec la théorie de la mesure. Loi d'une variable aléatoire en tant que mesure image.
- Variables aléatoires discrètes et à densité. Exemples de loi. Notion d'espérance, de variance, inégalités de Bienaymé-Tchebycheff et Markov. Notion de fonction de répartition, fonction génératrice, caractéristique. Simulation de v.a. par inversion de la fonction de répartition.
- Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Notion de covariance entre variables aléatoires.
- Calculs de loi (couple, marginale, somme de variables aléatoire,...)
- Convergence de variables aléatoires (p.s., en probabilité, en loi). Liens entre ces convergences.
- Application à l'estimation de paramètre en statistique par la méthode des moments (loi de Bernoulli, exponentielle, gaussienne, etc.)
- Théorème limites: loi des grands nombres, théorème centrale limite.
- Application à la construction d'intervalle de confiance en statistique. Application à l'estimation d'intégrales par la méthode de Monte-Carlo. Méthode de stabilisation de la variance.
- Conditionnement: par rapport à un événement, par rapport à une variable aléatoire. Calcul d'espérance conditionnelle.
- Vecteurs Gaussiens. Théorème centrale limite vectoriel. Application au test du Chi2 d'adéquation à une loi discrète.