UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
07-08

L1 - MP - MI ALGÈBRE
SEMESTRE 2

Corrigée par les étudiants

Feuille 1
Corps des nombres complexes

Exercice 1 – Mettre sous la forme $x + iy$ avec x, y réels les nombres complexes :

$$(3-2i)^2 \quad ; \quad (3-2i)^3 \quad ; \quad \frac{1}{3-2i} \quad ; \quad \frac{1}{(3-2i)(1-i)} \quad ; \quad \frac{2-i}{(3-i)(1-2i)} .$$

Exercice 2 – Déterminer sous la forme $x+iy$ avec x, y réels les nombres complexes z solutions des équations :

a) $4iz + 4 - 3i = 0$

b) $(10-2i)z + 5 + 7i = 0$

c) $(1-i)\overline{z} - 4 + 5i = 0$

Exercice 3 – Déterminer les couples de complexes solutions du système d'équations :

$$\left[\begin{array}{ccccc} (1+i)z_1 & - & 2z_2 & = & 3-i \\ iz_1 & + & (3+2i)z_2 & = & 1+2i \end{array}\right.$$

En déduire les couples de complexes solutions du système d'équations :

$$\left[\begin{array}{ccccc} (1-i)z_1 & - & 2z_2 & = & 3+i \\ -iz_1 & + & (3-2i)z_2 & = & 1-2i \end{array}\right.$$

Exercice 4 – (Équations du second degré à coefficients réels) Trouver les nombres réels ou complexes solutions des équations suivantes :

1a) $x^2 = \frac{32}{49}$; 1*b*) $x^2 = 0$; 1*c*) $x^2 = -17$

2a) $(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4} = 0$; 2*b*) $(\sqrt{3}x - 2)^2 = 0$; 2*c*) $(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4} = 0$

3a) $6x^2 - 5x + 1 = 0$; 3*b*) $9x^2 + 12\sqrt{2}x + 8 = 0$; 3*c*) $x^2 - x + \frac{13}{36} = 0$

Exercice 5 – (Équations du second degré à coefficients complexes) Déterminer sous la forme $x + iy$ avec x, y réels les deux nombres complexes solutions de l'équation $z^2 = c$ dans les cas :

$$c = 3 + 8i \quad ; \quad c = -11 + 4i \quad ; \quad c = 1 - i .$$

(Une méthode consiste à remarquer que $|z|^2 = x^2 + y^2 = |c|$, $x^2 - y^2 = \operatorname{Re} c$, à déterminer les couples (x^2, y^2), puis les couples (x, y) en tenant compte du signe de $2xy = \operatorname{Im} c$).

Exercice 6 – (Équations du second degré à coefficients complexes) Déterminer sous la forme $x + iy$ avec x, y réels les nombres complexes z solutions des équations :

a) $z^2 + (2+i)z - i = 0$

b) $z^2 - (1+2i)z + 2 = 0$

c) $4z^2 + (2-6i)z - 8 - 6i = 0$

Déduire de a) les solutions complexes de l'équation :

$$z^2 + (2-i)z + i = 0$$

.

Exercice 7 – Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :

$$-1 \quad ; \quad 1-i \quad ; \quad -2\sqrt{3}+2i \quad ; \quad (1+i)(\sqrt{3}-i) \quad ; \quad \frac{1+i}{3-i} \quad .$$

En déduire par exemple le module et l'argument des complexes z tels que

$$z^5 = 1+i \quad ; \quad z^3 = (1+i)(\sqrt{3}-i) \; .$$

Exercice 8 – (similitude directe) Déterminer le points fixe et la nature des similitudes directes :

$$\begin{array}{lll} \phi_1 : \mathbf{C} \to \mathbf{C} & ; & z \mapsto \phi_1(z) = 2iz + 1 - 3i \\ \phi_2 : \mathbf{C} \to \mathbf{C} & ; & z \mapsto \phi_2(z) = (1-i)z + 1 - 3i \\ \phi_3 : \mathbf{C} \to \mathbf{C} & ; & z \mapsto \phi_3(z) = (1+i\sqrt{3})z + 1 - 3i \\ \phi_4 : \mathbf{C} \to \mathbf{C} & ; & z \mapsto \phi_4(z) = (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2})z + 2 + i \end{array}$$

Exercice 9 – (similitude directe) Considérons les similitudes directes :

$$\begin{array}{lll} \phi : \mathbf{C} \to \mathbf{C} & ; & z \mapsto \phi(z) = (1+i)z + 2 + 3i \\ \psi : \mathbf{C} \to \mathbf{C} & ; & z \mapsto \psi(z) = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})z + 1 + i \end{array}$$

1) Déterminer le point fixe et la nature de ϕ et de ψ.
2) Préciser l'application composée $\phi \circ \psi$. Constater qu'il s'agit d'une similitude directe. Déterminer son point fixe et sa nature.
3) Même question avec $\psi \circ \phi$.
4) Nous savons que ϕ et ψ sont bijectives, préciser ϕ^{-1} et ψ^{-1}.
5) Constater que ϕ^{-1} et ψ^{-1} sont des similitudes directes. Préciser avec et sans calculs leurs points fixes et leurs natures.

Exercice 10 – Donner une expression de $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$ à l'aide de $\cos\theta$ et $\sin\theta$. Pour cela, on utilisera que pour tout entier relatif n et tout réel θ : $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$. Même question avec $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$

Exercice 11 - Soit θ un nombre réel et $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Montrer que pour tout entier n :

$$2\cos n\theta = z^n + \left(\frac{1}{z}\right)^n \quad ; \quad 2i\sin n\theta = z^n - \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

En développant $\left(z + \frac{1}{z}\right)^5$ et $\left(z - \frac{1}{z}\right)^5$, donner une expression de $\cos^5\theta$ et $\sin^5\theta$ à l'aide de $\cos 5\theta$, $\sin 5\theta$, $\cos 3\theta$, $\sin 3\theta$, $\cos\theta$ et $\sin\theta$

Exercice 12 - 1) Montrer que pour tout réel θ :

$$\cos\theta = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad ; \quad \sin\theta = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

2) Déduire à l'aide $\frac{\theta}{2}$ le module et l'argument du nombre complexe :

$$e^{i\theta} - 1 = \cos\theta + i\sin\theta - 1 \quad .$$

3) Montrer que pour tout nombre complexe z distinct de 1 :

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = 1 + z + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$$

4) Soit θ un nombre réel distinct de 0 mod 2π. Montrer que pour tout entier n :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = 1 + e^{i\theta} + \cdots + e^{in\theta} = e^{in\frac{\theta}{2}} \frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

5) En déduire que pour tout entier n et θ réel distinct de 0 mod 2π :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|} \quad \text{et} \quad \left|\sum_{k=0}^{n} \sin k\theta\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$$

Exercice 13 - 1) Soit z un complexe différent de $-i$. Montrer que le nombre complexe $\frac{z-i}{z+i}$ est différent de 1.

On note alors $f : \mathbf{C} - \{-i\} \to \mathbf{C} - \{1\}$ l'application définie par $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

2) Montrer que f est bijective. Déterminer f^{-1}.

3) Montrer que f admet deux points fixes z_1 et z_2 que l'on déterminera.

4) Montrer qu'il existe un complexe a que l'on précisera tel que pour tout z dictinct de $-i$ ~~et z_2~~ :

$$\frac{f(z) - z_1}{f(z) - z_2} = a\,\frac{z - z_1}{z - z_2}$$

5) Déterminer deux complexes c et d tels que pour tout complexe z distinct de $-i$:

$$f(z) = c + \frac{d}{z+i}$$

Exercice 14 – (similitudes directes) On considère Sim^+ l'ensemble des similitudes directes. Pour a un nombre complexe non nul et b un nombre complexe, on note $\phi_{a,b}$ la similitude directe :

$$\phi_{a,b} \ : \ \mathbf{C} \to \mathbf{C} \quad ; \quad z \mapsto \phi_{a,b}(z) = az + b$$

1) Soit a, a' des complexes non nuls et b, b' des complexes. Préciser l'application composée $\phi_{a,b} \circ \phi_{a',b'}$.
2) Montrer que $\phi_{a,b}$ est bijective et déterminer $\phi_{a,b}^{-1}$. Montrer que $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ définie par $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}}(z) = z$ est une similitude directe.
3) Montrer que Sim^+ pour la loi de composition des applications est un groupe d'élément neutre $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$.
4) Déterminer en fonction de a et b les points fixes de $\phi_{a,b}$.
Soit z_0, z_1, z_2 les affixes de 3 points M_0, M_1, M_2. Notons M_0', M_1', M_2' les points dont les affixes sont $\phi_{a,b}(z_0), \phi_{a,b}(z_1), \phi_{a,b}(z_2)$.
5) Montrer que

$$\|\overrightarrow{M_0'M_1'}\| = |a|\|\overrightarrow{M_0M_1}\|$$

En déduire que si M d'affixe z décrit un cercle de centre Ω d'affixe ω et de rayon R, les points d'affixes $\phi_{a,b}(z)$ décrivent un cercle que l'on précisera.
6) Montrer l'égalité des angles de vecteurs :

$$(\widehat{\overrightarrow{M_0'M_1'}, \overrightarrow{M_0'M_2'}}) = (\widehat{\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}})$$

En déduire que si M d'affixe z décrit une droite, les points d'affixes $\phi_{a,b}(z)$ décrivent une droite.

On considére l'ensemble $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$ formé des couples (a,b) tels que a est un nombre complexe non nul et b un nombre complexe. On considère la loi interne $\star$ sur $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$ définie par :

$$(a, b) \star (a', b') = (aa', ab' + b) \ .$$

7) Montrer que muni de cette loi $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$ est un groupe non commutatif dont on précisera l'élément neutre.
8) Montrer que l'application :

$$\mathbf{C}^* \times \mathbf{C} \to \mathrm{Sim}^+ \quad : \quad (a, b) \mapsto \phi_{a,b}$$

est un morphisme de groupe.
9) Montrer que ce morphisme de groupes est bijectif et déterminer son inverse.

21 Janvier 2008 — Algèbre — L1MP

Feuille 1 - Corps des nombres complexes

Exercice 1: Mettre sous la forme $x+iy$ avec x, y réels les nombres complexes :

★ $(3-2i)^2 = 9-12i+4i^2 = 9-12i-4 = \underline{5-12i}$

★ $(3-2i)^3 = (5-12i)(3-2i) = 15-10i-36i+24i^2$
$= 15-10i-36i-24$
$= \underline{-9-46i}$

NB on peut aussi utiliser la formule: $(a=3,\ b=-2i)$
$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

★ $\dfrac{1}{3-2i} = \dfrac{(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \dfrac{3+2i}{13} = \underline{\dfrac{3}{13}+\dfrac{2}{13}i}$

★ $\dfrac{1}{(3-2i)(1-i)} = \dfrac{1}{3-3i-2i+2i^2} = \dfrac{1}{3-2-5i} = \dfrac{1}{1-5i}$

$= \dfrac{1+5i}{(1-5i)(1+5i)} = \dfrac{1+5i}{26} = \dfrac{1}{26}+\dfrac{5}{26}i$

★ $\dfrac{2-i}{(3-i)(1-2i)} = \dfrac{2-i}{3-6i-i+2i^2} = \dfrac{2-i}{1-7i} = \dfrac{(2-i)(1+7i)}{(1-7i)(1+7i)}$

$= \dfrac{2+14i-i-7i^2}{50} = \dfrac{9+13i}{50} = \underline{\dfrac{9}{50}+\dfrac{13}{50}i}$

Exercice 2

a) $4iz+4-3i=0 \iff 4iz=-4+3i \iff z=\dfrac{-4+3i}{4i}=\dfrac{-4+3i}{4i}\times\dfrac{i}{i}$

$=\dfrac{-3-4i}{-4}$

$z=\dfrac{3}{4}+i$

b) $(10-2i)z+5+7i=0 \iff z=\dfrac{-5-7i}{10-2i}$

$=\dfrac{-5-7i}{10-2i}\times\dfrac{10+2i}{10+2i}$

$=\dfrac{-50-70i-10i+14}{104}$

$z=\dfrac{-36}{104}-\dfrac{80i}{104}=\dfrac{-9}{26}-\dfrac{10}{13}i$

c) $(1-i)\bar{z}-4+5i=0 \iff \bar{z}=\dfrac{4-5i}{1-i}$

$=\dfrac{4-5i}{1-i}\times\dfrac{1+i}{1+i}$

$\bar{z}=\dfrac{9-1i}{2}=\dfrac{9}{2}-\dfrac{1}{2}i$

donc $z=\dfrac{9}{2}+\dfrac{1}{2}i$

Correction exercice 3

$$\begin{cases} (1+i)z_1 - 2z_2 = 3-i & (1) \\ iz_1 + (3+2i)z_2 = 1+2i & (2) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (1)\times i \\ (2)\times(1+i) \end{matrix} \begin{cases} i\times[(1+i)z_1 - 2z_2] = 3i+1 \\ (1+i)[iz_1 + (3+2i)z_2] = (1+i)(1+2i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} iz_1 - z_1 - 2iz_2 = 3i+1 & (1)' \\ iz_1 + z_2 + 5iz_2 - z_1 = 3i-1 & (2)' \end{cases}$$

(méthode par élimination :)

$(1)' - (2)'$: $-7iz_2 - z_2 = 2$

d'où $z_2 = \dfrac{-2}{1+7i} = \dfrac{-2(1-7i)}{50} = \boxed{-\dfrac{1}{25} + \dfrac{7}{25}i}$

1ère méthode pour calculer z_1 :

On remplace z_2 dans l'expression (1) : (méthode par substitution)

$(1+i)z_1 - 2\left(-\dfrac{1}{25} + \dfrac{7}{25}i\right) = 3-i$

$z_1(i+1) = \dfrac{73}{25} - \dfrac{11}{25}i$

d'où $z_1 = \left(\dfrac{73}{25} - \dfrac{11}{25}i\right) \times \dfrac{1}{1+i} = \left(\dfrac{73}{25} - \dfrac{11}{25}i\right) \times \dfrac{1-i}{2}$

$= \dfrac{73(1-i) - 11i(1-i)}{50}$

$= \dfrac{-84i+62}{50} = \boxed{-\dfrac{42}{25}i + \dfrac{31}{25}}$

2ème méthode pour calculer z_1 :
semblable à celle pour calculer z_2 :
$(3+2i)\times(1) + 2\times(2)$ donne
$(1+7i)z_1 = 13+7i$ ...d'où...
$z_1 = \dots$

donc le couple solution de ce système est : $S = \left\{\left(-\dfrac{42}{25}i + \dfrac{31}{25} \; ; \; -\dfrac{1}{25} + \dfrac{7}{25}i\right)\right\}$
$(z_1 ; z_2)$

Conseil : remplacer z_1 et z_2 par ces valeurs dans le système pour vérifier qu'ils sont bien solution

$$\begin{cases} (1-i)z_1 - 2z_2 = 3+i \\ -iz_1 + (3-2i)z_2 = 1-2i \end{cases}$$

Ce système a pour solution le conjugué de la solution du système précédent donc : $S' = \left\{\left(\dfrac{42}{25} + \dfrac{31}{25}i \; ; \; -\dfrac{1}{25} - \dfrac{7}{25}i\right)\right\}$

Correction exercice 4

1) a. $x^2 = \frac{32}{49} \iff x = \sqrt{\frac{32}{49}} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$ ou $x = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$

b. $x^2 = 0 \iff x = 0$

c. $x^2 = -17 = 17i^2 \iff x = -\sqrt{17}\,i$ ou $x = \sqrt{17}\,i$

2) a. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} = 0 \iff \left[\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\left[\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 0$

$$\iff \left(x - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = 0$$

d'où $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ ou $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

ou bien directement : $x - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $x = \frac{1 \mp \sqrt{3}}{2}$

b. $\left(\sqrt{3}\,x - 2\right)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{3}\,x - 2 = 0$ d'où $x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

c. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{5}{4} = \frac{5}{4}i^2$

d'où $x - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}i$ ou $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}i$

$x = -\frac{\sqrt{5}}{2}i + \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{\sqrt{5}}{2}i + \frac{1}{2}$

3) a. $6x^2 - 5x + 1 = 0$

$\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$ (deux solutions) (remplacer tout de suite $\sqrt{1}$ par 1 !)

$x = \frac{5 - \sqrt{1}}{12} = \frac{1}{3}$ ou $x = \frac{5 + \sqrt{1}}{12} = \frac{1}{2}$

b. $9x^2 + 12\sqrt{2}\,x + 8 = 0$

$\Delta = 288 - 288 = 0$ (une seule solution)

$x = \frac{-12\sqrt{2}}{18} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

c. $x^2 - x + \frac{13}{36} = 0$

$\Delta = 1 - \frac{13}{9} = -\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}i\right)^2$

$x = \frac{1 - \frac{2}{3}i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$

ou $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$.