

# ANEMOS: contribution CASTOR à “scalable nonlinear solver”

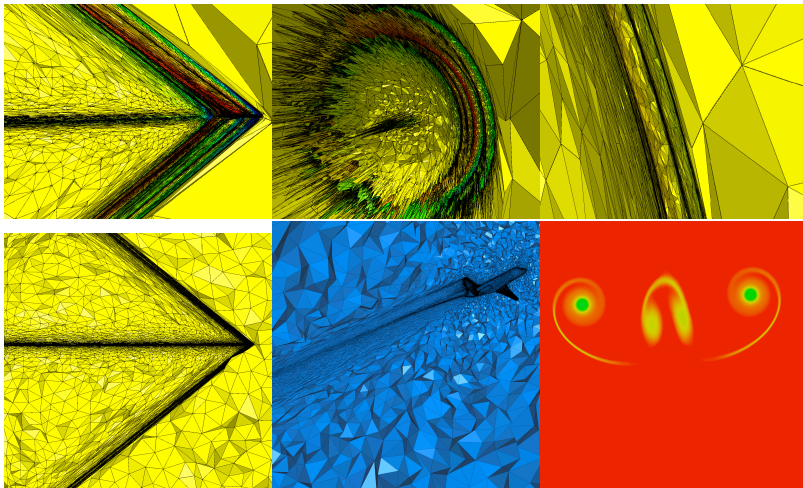
G. Brethes\* et A. Dervieux\*

(\*INRIA, Sophia-Antipolis, France  
Gautier.Brethes@inria.fr  
Alain.Dervieux@inria.fr

ANEMOS, 31 janvier 2013

# Motivation de l'étude:

## Profiter des avancées en adaptation de maillages



# Contenu de la présentation:

I. Problème à résoudre

II. Méthode multigrille adaptative anisotrope

III. Résolution Full-Multigrid(FMG)

IV. Méthode multigrille adaptative anisotrope : métrique

V. Exemple: Résolution implicite sur un pas de temps.

VI. Conclusions

VII. Perspectives

# I. Problème à résoudre

## Equation de diffusion anisotrope

$$u_t + Au = f \text{ on } \Omega$$

$$Bu = g \text{ on } \partial\Omega$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ on } \Omega$$

$$(Id + \Delta t A)u^{n+1} = u^n + \Delta t f \text{ on } \Omega_h$$

$$f = 0$$

$$A = -\operatorname{div} K \operatorname{grad}$$

$$K(x, y) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

Système

$$Au = f$$

$$S = D^{-1}(D - A),$$

$D$  = diagonale de  $A$ ,

$$\bar{A} = RAP,$$

$P$  et  $R$  les opérateurs de transfert,

$\nu$  le nombre de pre-lissages

## II. Méthode multigrille adaptative anisotrope

### Adaptation et raffinement successifs

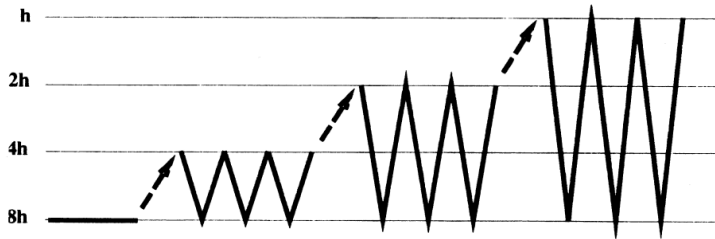
Plusieurs stratégies peuvent être choisies pour **adapter de manière anisotrope** le maillage afin d'améliorer **la convergence numérique** vers la solution continue: stratégies basées Hessien, stratégies orientées fonctionnelles, notamment.

### Multigrille anisotrope

La meilleure stratégie pour résoudre par multigrille des systèmes contenant des opérateurs anisotropes a été identifiée il y a des décennies (théorie des multigrilles algébriques\*). Elle repose sur la construction de grilles grossières par semi-déraffinement anisotrope suivant la direction des arêtes portant les plus grands coefficients de la matrice.

\*A.Brandt, S.F. McCormick, J. Ruge, Algebraic multigrid (AMG) for sparse matrix equations, in Sparsity and its Applications, D.J. Evans, ed., Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1984, pp.257-284.

# III. Résolution Full-Multigrid (FMG)



Quatre phases de trois cycles chacune.

## Rappel, cf livre de Hackbusch

L'algorithme **MG** a besoin de deux hypothèses:

**- propriété de lissage:**

Il existe une constante  $C_S$  et une fonction  $\eta(v)$  indépendantes de la taille  $h$  des mailles de la grille fine telles que  $\|AS^v\| \leq C_S h^{-2m} \eta(v)$

où  $\eta(v) \xrightarrow{v \rightarrow +\infty} 0$  et où  $2m$  est l'ordre de l'EDP à résoudre

**- propriété d'approximation:**

Il existe une constante  $C_A$  indépendante de  $h$  telle que  $\|A^{-1} - P\bar{A}^{-1}R\| \leq C_A h^{2m}$ .

En plus de ces deux hypothèses-là, l'algorithme **FMG** a aussi besoin d'une

**propriété de convergence numérique:**

$$\forall k_{\text{phase}} > 0, \|u^{k_{\text{phase}}+1} - Pu^{k_{\text{phase}}}\| \leq C_1 h^{k_{\text{phase}}+1}$$

Si ces trois propriétés sont vérifiées, l'algorithme FMG a une complexité de  $O(N)$ , avec  $N$  le nombre de mailles de la grille fine.

L'adaptativité permet d'avoir la propriété de convergence dans la plupart des cas.



# IV. Méthode multigrille adaptative anisotrope: métrique

## Paramétrisation du maillage

Tout niveau est un véritable maillage (une triangulation conforme en 2D). Tout maillage est construit comme un maillage unité pour une métrique  $\mathcal{M}$  précise. L'adaptation et le déraffinement se font grâce à des métriques.

$$\mathcal{M}(x,y) = \mathcal{R}^t(x,y) \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta\xi^2(x,y)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta\eta^2(x,y)} \end{pmatrix} \mathcal{R}(x,y)$$

avec:

$\Delta\xi(x,y)$  = taille de maille dans la première direction caractéristique

$\Delta\eta(x,y)$  = taille de maille dans la deuxième direction caractéristique

$\mathcal{R}(x,y)$  = matrice des vecteurs propres.

## Déraffinement isotrope (ordre deux)

Tailles de mailles multipliées par deux dans les deux directions

$$\mathcal{M}_{fin}(x, y) = \frac{1}{\Delta\xi(x, y)\Delta\eta(x, y)} \mathcal{R}^t(x, y) \begin{pmatrix} \frac{\Delta\eta(x, y)}{\Delta\xi(x, y)} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta\xi(x, y)}{\Delta\eta(x, y)} \end{pmatrix} \mathcal{R}(x, y)$$

$$\mathcal{M}_{grossier}(x, y) = \frac{1}{2\Delta\xi(x, y)2\Delta\eta(x, y)} \mathcal{R}^t(x, y) \begin{pmatrix} \frac{2\Delta\eta(x, y)}{2\Delta\xi(x, y)} & 0 \\ 0 & \frac{2\Delta\xi(x, y)}{2\Delta\eta(x, y)} \end{pmatrix} \mathcal{R}(x, y)$$

$$\mathcal{M}_{grossier}(x, y) = \frac{1}{4} \mathcal{M}_{fin}(x, y)$$

## Déraffinement anisotrope

Taille de mailles multipliées par deux dans la première direction caractéristique

$$\mathcal{M}_{fin}(x, y) = \frac{1}{\Delta\xi(x, y)\Delta\eta(x, y)} \mathcal{R}^t(x, y) \begin{pmatrix} \frac{\Delta\eta(x, y)}{\Delta\xi(x, y)} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta\xi(x, y)}{\Delta\eta(x, y)} \end{pmatrix} \mathcal{R}(x, y)$$

$$\mathcal{M}_{grossier}(x, y) = \frac{1}{2\Delta\xi(x, y)\Delta\eta(x, y)} \mathcal{R}^t(x, y) \begin{pmatrix} \frac{\Delta\eta(x, y)}{2\Delta\xi(x, y)} & 0 \\ 0 & \frac{2\Delta\xi(x, y)}{\Delta\eta(x, y)} \end{pmatrix} \mathcal{R}(x, y)$$

$$\mathcal{M}_{grossier}(x, y) = \frac{1}{\Delta\xi(x, y)\Delta\eta(x, y)} \mathcal{R}^t(x, y) \begin{pmatrix} \frac{\Delta\eta(x, y)}{4\Delta\xi(x, y)} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta\xi(x, y)}{\Delta\eta(x, y)} \end{pmatrix} \mathcal{R}(x, y)$$

## Remarque

La direction d'anisotropie pour adapter à la solution exacte et la direction d'anisotropie pour les multigrilles anisotropes ne sont pas obligatoirement les mêmes. Cependant, le cas où elle sont différentes n'est pas étudié ici.

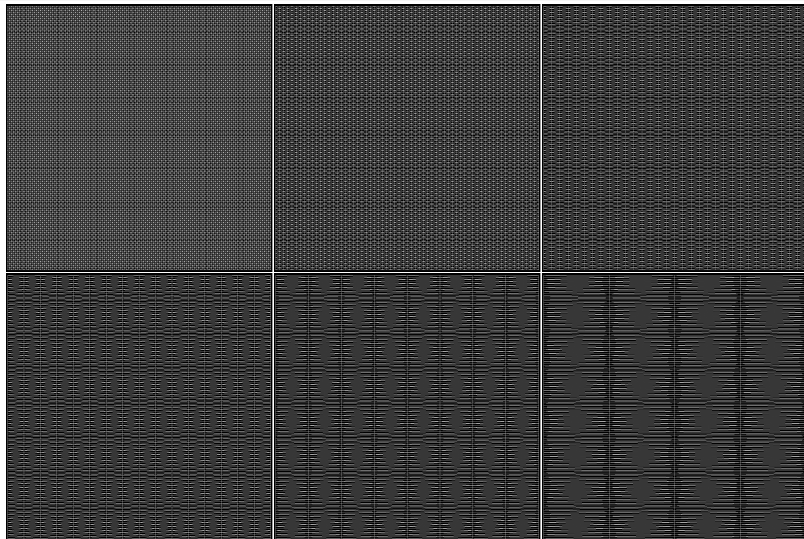
## Hypothèse de nos premiers calculs

On commence le déraffinement sur un maillage uniforme.

Premières expériences maillages structurés.

# V. EXEMPLE: Résolution implicite sur un pas de temps.

Maillages  $129 \times 129$ ,  $65 \times 129$ ,  $33 \times 129$ ,  $17 \times 129$ ,  $9 \times 129$  et  $5 \times 129$

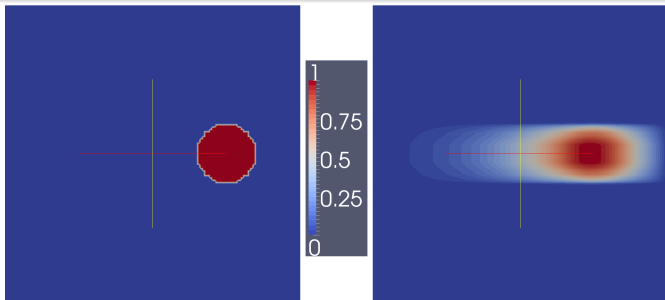


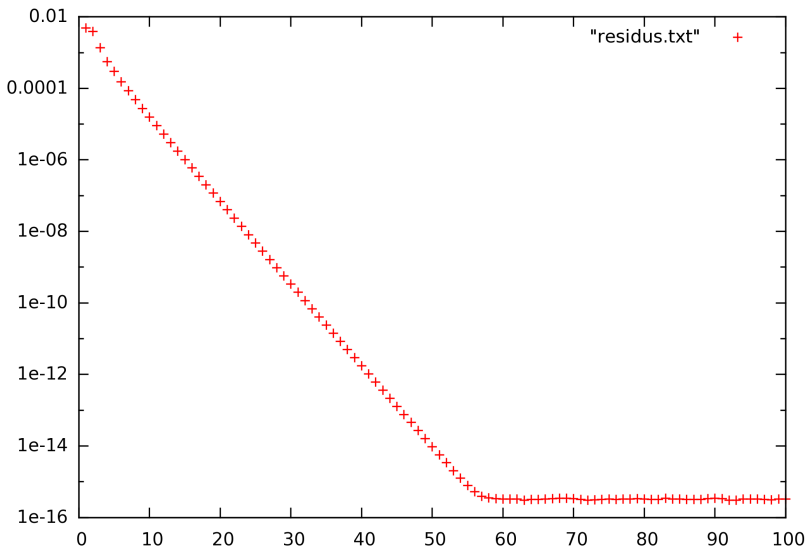
Six maillages utilisés. Un balayage de Jacobi par grille intermédiaire. Cinq balayages sur la grille la plus grossière.

$$\varepsilon = 10000$$

$$\Delta t = 1$$

Condition initiale à gauche. Premier pas de temps à droite.





## VI. Conclusions

Avec les multigrilles, on décroît de 14 décades pour 60 cycles, soit 1 décade pour 4 cycles. Pour chaque cycle, on effectue un balayage de Jacobi par niveau c'est-à-dire

$$\sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{4}\right)^i \approx 1,5 \text{ balayages par cycle.}$$

Pour descendre d'une décade, il faut donc l'équivalent de 6 balayages de Jacobi, plus les transferts.

Or, dans l'algorithme FMG, il suffira de descendre d'une décade par phase.

Lors d'un test antérieur, on avait constaté que, pour la méthode de Schwarz ILU appliquée sur 16 sous-domaines, il fallait 250 itérations pour converger. Les multigrilles sont, ici, bien plus efficaces.



## VII. Perspectives

Mise en place d'une résolution par la méthode Full-Multigrid.

Réalisation d'un remailleur adaptatif guidé métrique sans hypothèse sur la structure du maillage.

Merci de votre attention