

Eléments finis C^1 de Bell appliqués à la MHD réduite

Marie MARTIN

Directeur de thèse : B. Nkonga

Laboratoire J-A Dieudonné, Nice

Journée ANR ANEMOS

30-31 janvier 2013

- 1 Modélisation physique des plasmas : MHD
- 2 Eléments finis C^1
 - Présentation des éléments finis C^1 de Bell
 - Application sur le système du Current Hole
 - Formulation faible
- 3 Résultats numériques
- 4 Conclusions et perspectives

- 1 Modélisation physique des plasmas : MHD
- 2 Eléments finis C^1
 - Présentation des éléments finis C^1 de Bell
 - Application sur le système du Current Hole
 - Formulation faible
- 3 Résultats numériques
- 4 Conclusions et perspectives

MHD (Magnétohydrodynamique) : système d'équation considérant le plasma comme un fluide obéissant aux lois de conservations et lois de Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \\
 \partial_t \rho \mathbf{v} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p - \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}, \\
 \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v} + p \mathbf{v}) = (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}) + \eta \mathbf{J}^2 \\
 \quad - (\underline{\boldsymbol{\pi}}_e : \nabla \mathbf{v}_e + \underline{\boldsymbol{\pi}}_i : \nabla \mathbf{v}_i + \nabla \cdot \mathbf{Q}), \\
 \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \\
 \frac{p}{\gamma - 1} = \rho e - \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2, \\
 \nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
 \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\
 \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J} + \frac{1}{en} (\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p_e - \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}_e).
 \end{array} \right. \quad (1)$$

hypothèses de la MHD réduite :

- ▶ champ magnétique \mathbf{B} puissant principalement toroïdal :

$$\mathbf{B} = F\nabla\phi + \nabla \times (\psi\nabla\phi),$$

$$\mathbf{v} = v_n\mathbf{B} + \mathbf{v}_\perp,$$

$$= v_n\mathbf{B} + R^2\nabla\phi \times \nabla\varphi,$$

- ▶ Courant \mathbf{J} principalement toroïdal :

$$\mathbf{J} = -\frac{1}{\mu_0}\Delta^*\psi\nabla\phi$$

$$j_\phi = \frac{\Delta^*\psi}{\mu_0}$$

hypothèses supplémentaires pour le système du Current Hole :

- ▶ la vitesse parallèle et la pression sont négligées :

$$v_n = 0,$$

$$p = 0,$$

- ▶ la densité du plasma ρ est homogène

Dans le cas simplifié du cylindre le système du Current Hole s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial t} = [\psi, \varphi] + \eta(j_\phi - j_c), \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} = [\omega, \varphi] + [\psi, j_\phi] + \nu \Delta \omega, \\ j_\phi = \frac{1}{\mu_0} \Delta \psi, \\ \omega = \Delta \varphi, \end{array} \right. \quad (2)$$

avec $[.,.]$ caractérise les crochets de Poisson définis par :

$$[a, b] = (\nabla a \times \nabla b) \cdot e_\phi = -[b, a]. \quad (3)$$

Ce système pourrait se réécrire avec 2 équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial t} = [\psi, \varphi] + \eta(\Delta \psi - \Delta \psi_c), \\ \frac{\partial (\Delta \varphi)}{\partial t} = [\Delta \varphi, \varphi] + [\psi, \Delta \psi] + \nu \Delta (\Delta \varphi), \end{array} \right. \quad (4)$$

- 1 Modélisation physique des plasmas : MHD

- 2 **Eléments finis C^1**
 - Présentation des éléments finis C^1 de Bell
 - Application sur le système du Current Hole
 - Formulation faible

- 3 Résultats numériques

- 4 Conclusions et perspectives

On cherche une solution dans un espace de dimension finie tel que cette solution soit C^1 . Pour résoudre ce système on utilise la méthode des éléments finis avec des éléments finis C^1 de Bell^{1,2}. Le domaine d'étude Ω est discrétisé par un maillage triangulaire régulier τ_h :

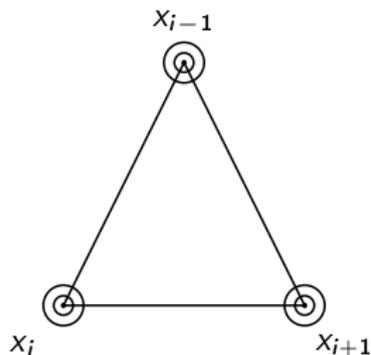


Figure: élément $e \in \tau_h$

-
1. K. BELL « A refined triangular plate bending finite element », International Journal of numerical methods in engineering, 1969
 2. M. Bernadou et J.-M. Boisserie, Curved finite elements of class C^1 : implementation and numerical experiments, INRIA, Rapport de recherche, inria-00076956, 1992

Chacun des éléments $e \in \tau_h$ est défini par 3 points (x_{i-1}, x_i, x_{i+1})

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{x}_i \lambda_i(\mathbf{x}) \\ \mathcal{P}_e \omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \omega_i \check{\mathcal{B}}_i^0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^3 \left(\mathcal{D}_i \cdot (\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_i) \right) \check{\mathcal{B}}_{i,i-1}^1(\mathbf{x}) \\ \quad + \sum_{i=1}^3 \left(\mathcal{D}_i \cdot (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) \right) \check{\mathcal{B}}_{i,i+1}^1(\mathbf{x}) \\ \quad + \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \left(\mathcal{H}_i : (\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_{j-1}) \otimes (\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_{j-1}) \right) \check{\mathcal{B}}_{i,j}^2(\mathbf{x}) \end{array} \right.$$

avec pour inconnues :

$$\omega_i, \quad \mathcal{D}_i \simeq \partial_{\mathbf{x}} \omega_i \simeq \begin{pmatrix} \partial_r \omega \\ \partial_z \omega \end{pmatrix}_i \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_i \simeq \begin{pmatrix} \partial_{rr}^2 \omega & \partial_{rz}^2 \omega \\ \partial_{rz}^2 \omega & \partial_{zz}^2 \omega \end{pmatrix}_i \equiv \begin{pmatrix} \partial_{rr}^2 \omega \\ \partial_{rz}^2 \omega \\ \partial_{zz}^2 \omega \end{pmatrix}_i$$

les fonctions de bases sont :

$$\check{B}_i^0(\mathbf{x}) = \lambda_i^2 [6\lambda_i^3 - 15\lambda_i^2 + 10\lambda_i + 15(1 + \eta_{i+1})\lambda_{i-1}^2\lambda_{i+1} + 15(1 - \eta_{i-1})\lambda_{i-1}\lambda_{i+1}^2]$$

$$\check{B}_{i,i-1}^1(\mathbf{x}) = \lambda_{i-1}\lambda_i^2 \left[-3\lambda_i^2 + 4\lambda_i + 3\lambda_{i+1}^2 + \frac{9 + 15\eta_{i+1}}{2}\lambda_{i-1}\lambda_{i+1} \right]$$

$$\check{B}_{i,i+1}^1(\mathbf{x}) = \lambda_i^2\lambda_{i+1} \left[-3\lambda_i^2 + 4\lambda_i + 3\lambda_{i-1}^2 + \frac{9 - 15\eta_{i-1}}{2}\lambda_{i-1}\lambda_{i+1} \right]$$

$$\check{B}_{i,i-1}^2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\lambda_i^2\lambda_{i+1} \left[-\lambda_i^2 + \lambda_i + \lambda_{i-1}^2 + \frac{9 - 15\eta_{i-1}}{6}\lambda_{i-1}\lambda_{i+1} \right]$$

$$\check{B}_{i,i+1}^2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\lambda_{i-1}\lambda_i^2 \left[-\lambda_i^2 + \lambda_i + \lambda_{i+1}^2 + \frac{9 + 15\eta_{i+1}}{6}\lambda_{i-1}\lambda_{i+1} \right]$$

$$\check{B}_{i,i}^2(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\lambda_{i-1}\lambda_i^2\lambda_{i+1}$$

Les coordonnées barycentriques λ_i et l'excentricité η_i sont définis par :

$$\lambda_i(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i+1}) \times (\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_{i+1}) \cdot \widehat{\mathbf{z}}}{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i+1}) \times (\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_{i+1}) \cdot \widehat{\mathbf{z}}} \quad \text{and} \quad \eta_i = \frac{\|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i\|^2 - \|\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_i\|^2}{\|\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_{i+1}\|^2}$$

Ce système du Current Hole admet pour conditions initiales :

$$\begin{cases} \varphi(0, x) = \omega(0, x) = 0, \\ \Delta^* \psi(0, x) = J(0, x) = J_c(x), \end{cases} \quad \forall x \in \Omega. \quad (5)$$

et pour conditions de bords

$$\begin{cases} \psi(t, x) = 0 \\ \partial_{n^\perp} \psi(t, x) = 0 \\ \partial_{n^\perp n^\perp}^2 \psi(t, x) = 0, \end{cases} \quad \forall x \in \partial\Omega, \forall t \in [0, T_f], \quad (6)$$

où n^\perp est la normale tangentielle au bord du domaine, $\partial\Omega$ est le bord du domaine Ω et T_f est le temps final de simulation,

Pour résoudre ce système du Current Hole on pose le vecteur W contenant les variables $W^n = (\psi^n, \varphi^n, J^n, \omega^n)$ et par extension : $W^{n+1} - W^n = (\delta\psi, \delta\varphi, \delta J, \delta\omega)$, tel que le système du Current Hole se réécrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta\psi}{\delta t} = [\psi^n + \alpha\delta\psi, \varphi^n + \beta\delta\varphi] + \eta(J^n + \gamma\delta J - J_c), \\ \frac{\delta\omega}{\delta t} = [\omega^n + \lambda\delta\omega, \varphi^n + \beta\delta\varphi] + [\psi^n + \alpha\delta\psi, J^n + \gamma\delta J] + \nu\Delta(\omega^n + \lambda\delta\omega), \\ \delta J = \Delta(\delta\psi), \\ \delta\omega = \Delta(\delta\varphi), \end{array} \right. \quad (7)$$

On multiplie chacune des équations de ce système par une fonction test $\mathcal{B} \in V$ et on intègre sur le domaine Ω :

$$\int_{\Omega} \frac{\delta \psi}{\Delta t} \mathcal{B} + \alpha [\varphi^n, \delta \psi] \mathcal{B} - \beta [\psi^n, \delta \varphi] \mathcal{B} - \gamma \eta \delta J \mathcal{B} d\Omega = \int_{\Omega} [\psi^n, \varphi^n] \mathcal{B} + \eta (J^n - J_c) \mathcal{B} d\Omega. \quad (8)$$

Si on considère les variables de ce système dans le même espace d'approximation V_h :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_e = \underline{\psi}_e \cdot \mathcal{B}_e, \\ \frac{\partial \psi_e}{\partial n} = \underline{\psi}_e \cdot \frac{\partial \mathcal{B}_e}{\partial n}, \\ \left(\underline{\psi}_e \cdot \frac{\partial \mathcal{B}_e}{\partial n} \right) \frac{\partial \mathcal{B}_e}{\partial m} = \left(\frac{\partial \mathcal{B}_e}{\partial m} \otimes \frac{\partial \mathcal{B}_e}{\partial n} \right) \underline{\psi}_e. \end{array} \right. \quad (9)$$

Cette équation (8) se résume donc à :

$$\int_{\Omega_e} (\mathcal{B}_e \otimes \mathcal{B}_e) \frac{\delta \psi_e}{\Delta t} + \alpha \varphi_e^n \delta \psi_e [\mathcal{B}_e, \mathcal{B}_e] \mathcal{B}_e - \beta \psi_e^n \delta \varphi_e [\mathcal{B}_e, \mathcal{B}_e] \mathcal{B}_e - \gamma \eta (\mathcal{B}_e \otimes \mathcal{B}_e) \delta J_e d\Omega = \int_{\Omega_e} \psi_e^n \varphi_e^n [\mathcal{B}_e, \mathcal{B}_e] \mathcal{B}_e + \eta (\mathcal{B}_e \otimes \mathcal{B}_e) (J_e^n - J_{ce}) d\Omega. \quad (10)$$

- 1 Modélisation physique des plasmas : MHD
- 2 Eléments finis C^1
 - Présentation des éléments finis C^1 de Bell
 - Application sur le système du Current Hole
 - Formulation faible
- 3 Résultats numériques
- 4 Conclusions et perspectives

Le Current hole est un équilibre instable obtenu à partir des équations de la MHD réduite résistive dépendant du temps. Pour ce cas test on a pris la viscosité : $\nu = 10^{-6}$ et la résistivité $\eta = 10^{-5}$. Le courant d'entrée J_c est tel que :

$$J_c = j_1(1 - r^4) - j_2(1 - r^2)^8 \quad \text{avec } j_1 = 0.2 \text{ et } j_2 = 0.2666. \quad (11)$$

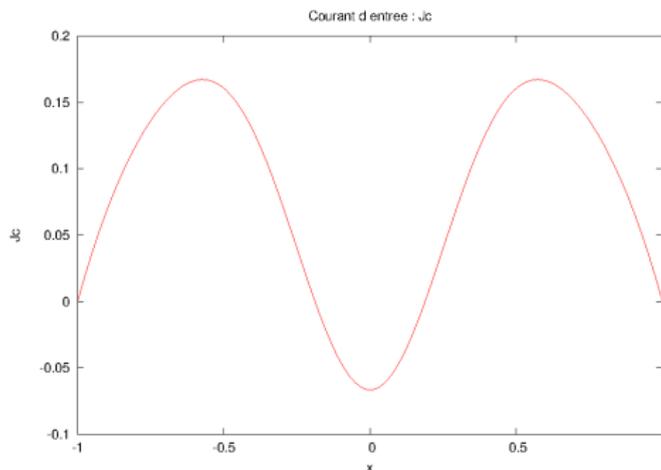


Figure: Courant d'entrée : J_c

Le domaine de ce cas test Ω est un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

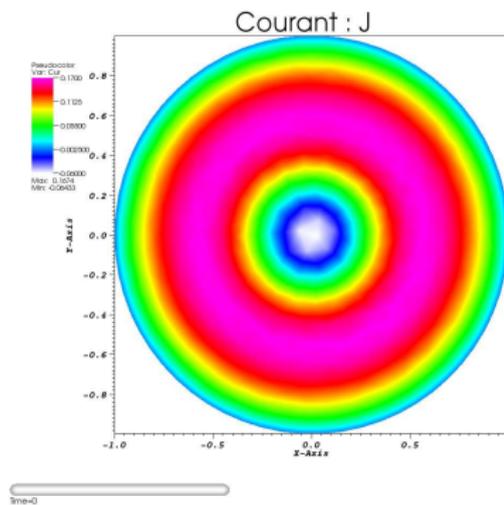


Figure: Densité de courant J

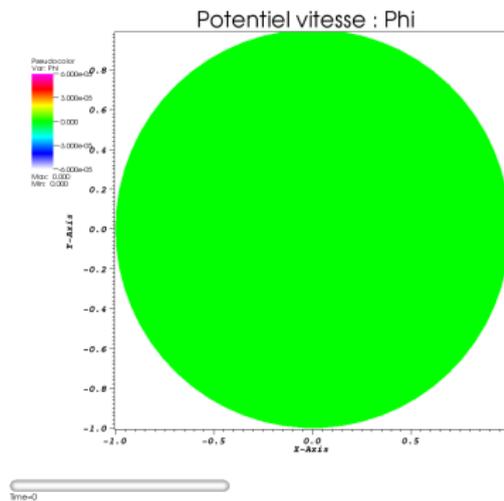


Figure: Potentiel vitesse φ

Observation des instabilités en dents de scie sur le graphique présentant l'énergie cinétique.

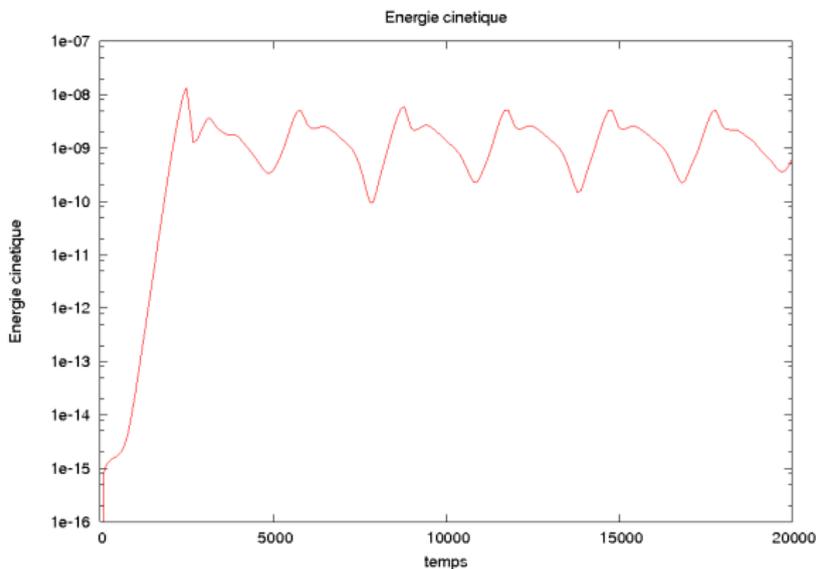


Figure: Energie Cinétique en fonction du temps avec les éléments de Bell

- 1 Modélisation physique des plasmas : MHD
- 2 Eléments finis C^1
 - Présentation des éléments finis C^1 de Bell
 - Application sur le système du Current Hole
 - Formulation faible
- 3 Résultats numériques
- 4 Conclusions et perspectives

Perspectives :

- ▶ Utilisation des éléments finis de Bell pour des modèles plus complets jusqu'au modèle de Full-MHD....
- ▶ Utilisation des éléments C^1 de Powell-Sabin

Merci de votre attention !!