UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2017/2018**
Faculté des Sciences Algèbre 2
Département de Mathématiques Durée 2 h

Corrigé du Contrôle Terminal

Exercice 1. Considérons le système : $S = \begin{cases} \quad\quad y - 2z = a \\ x + y + z = b \\ x \quad\quad + z = 0 \end{cases}$

(a) Quelle est la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ de ce système ? Calculer sa matrice inverse A^{-1}.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(b) Résoudre le système S

(i) en calculant $A^{-1}B$ pour $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$.

$A^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a-b \\ 2b \\ -a+b \end{pmatrix}$.

(ii) en utilisant les formules de Cramer.

Rappelons les formules de Cramer : $x = \frac{\det A_x}{\det A}$, $y = \frac{\det A_y}{\det A}$, $z = \frac{\det A_z}{\det A}$.

Il ne reste que calcluer les déterminants : $\det A = 2$, $\quad \det A_x = \begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ b & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a - b$, $\quad \det A_z = \begin{vmatrix} 0 & a & -2 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2b$, $\quad \det A_z = \begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a + b$.

Exercice 2.
On considère l'espace $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel et l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^4$ est la suivante : $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(a) Que peut-on dire a priori (à l'aide des théorèmes du cours et sans calcul) sur les valeurs propres et les espaces propres de f ?
A est symétrique à coefficients réels. Alors, par un théorème du cours, les valeurs propres de A sont réelles et elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Les espaces propres de A sont deux-à-deux orthogonaux.

(b) Est-ce que le vecteur $u = (1, -1, -1, 1)$ est un vecteur propre de f ? Si oui pour quelle valeur propre ? Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}_F$ de l'espace propre F associé à cette valeur propre.
On calcule le produit de A par la matrice colonne de u. On trouve $4u$. Le vecteur u est un vecteur propre de A pour la valeur propre 4. La matrice $A - 4I_4$ est de rang 1. L'espace propre F est donc de dimension $4-1 = 3$ et il est d ?efini par la seule équation $x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$. Grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt, on trouve une base orthonormée de F, par exemple :

$$\mathcal{B}_F = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1/2, -1/2, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1/2, -1/2), (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)).$$

(c) Déterminer un vecteur non nul v orthogonal à F. Vérifier que u est un vecteur propre de f.
L'espace F est un hyperplan dont le vecteur normal est $n := (1, 1, 1, 1)$. Ce vecteur engendre donc $F^\perp$ qui est de dimnesion $4 - \dim F = 1$. On vérifie en calculant le produit de A par la matrice colonne de n, que n est un vecteur propre de A pour la valeur propre 8.

(d) Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de f.
On ajoute le vecteur n normalisé à $\mathcal{B}_F$. On obtient une base orthonormée de$\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres f

$$\mathcal{B} = ((\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0), (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (1/2, 1/2, -1/2, -1/2), (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)).$$

(e) Écrire la matrice A' de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer une matrice orthogonale P telle que $A' = P^{-1}AP$.
On désigne par P la matrice orthogonale associée‘ $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1/2 & 1/2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.
C'est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ et la matrice $A' := P^{-1}AP$ est la matrice diagonale de diagonale $(4, 4, 4, 8)$.

(f) Quel est le rang de la matrice A ? Combien vaut son déterminant ? Quel est son polynôme caractéristique ? Justifier vos réponses.
Les deux matrices A et A' sont semblables et ont donc même déterminant, rang et polynôme caractéristique. Le déterminant de A vaut $2^9 = 512$. Le rang de A' est 4. Le polynôme caractéristique de A' est $(X - 8)(X - 4)^4$.

Exercice 3.

Partie 1 : Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E de dimension finie et soit u un vecteur de E.

(a) Rappeler la définition du projeté orthogonal $pr_F^{\perp}(u)$ de u sur F.
Le projeté orthogonal de u sur F est le seul vecteur x de F tel que $u - x \in F^{\perp}$. On le note $pr_F^{\perp}(u)$. Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une b.o.n. de F, alors

$$pr_F^{\perp}(u) = \langle u|e_1\rangle\, e_1 + \cdots + \langle u|e_p\rangle\, e_p.$$

(b) Soit $v \in F$. Montrer que $\|u - pr_F^{\perp}(u)\| \leq \|u - v\|$.
On a un résultat plus précis

$$\|u - pr_F^{\perp}(u)\|^2 + \|pr_F^{\perp}(u) - v\|^2 = \|(u - pr_F^{\perp}(u)) + (pr_F^{\perp}(u) - v)\|^2 = \|u - v\|^2,$$

qui est une consequence du théorème de Pythagore. En effet, $pr_F^{\perp}(u) - v \in F$ et, par conséquent, par la définition de $pr_F^{\perp}(u)$, $(u - pr_F^{\perp}(u)) \perp (pr_F^{\perp}(u) - v)$. D'où le résultat.

Partie 2 : On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
Vérifions que φ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
La symétrie : c'est une conséquence triviale de la commutativité du produit des fonctions.
La bilinéarité :
La distributivité du produit des fonctions, à gauche et à droite, par rapport à l'addition des fonctions, et la linéarité de l'intégrale permettent de vérifier facilement la bilinéarité.
La positivité : La fonction $t \to P^2(t)$ est positive sur $[0, 1]$ donc son intégrale l'est aussi.
Le caractère défini : Comme la fonction $t \to P^2(t)$ est positive et continue sur $[0, 1]$, son intégrale sur $[0, 1]$ ne peut être nulle que si cette fonction est nulle sur l'intervalle $[0, 1]$. Comme $t \to P^2(t)$ est une fonction polynomiale, elle ne peut avoir une infinité de racines que si c'est la fonction nulle, c'est à dire si le polynôme P^2, et par suite le polynôme P lui-même, est le polynôme nul, ce qui prouve bien le caractère défini de la forme quadratique associée à φ.

(b) Notons par F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ engendré par les polynômes 1 et X. Calculer le projeté orthogonal de X^2 sur F.
L'algorithme de Gram-Schmidt appliqué à $1, X$ donne une base orthonormée de F :

$$e_1 = 1, e_2 = \sqrt{12}\,(X - \frac{1}{2}).$$

et la projection $pr_F^{\perp}(X^2) = \langle X^2|e_1\rangle e_1 + \langle X^2|e_2\rangle e_2 = X - \frac{1}{6}$

(c) Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ qui minimisent $\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 \mathrm{d}t$.
(Vous pouvez utiliser le résultat du Part 1.)
Par Partie 1 l'intégrale est minimum lorsque $aX + b$ est la projection orthogonale de X^2 sur F . Par (b) c'est le cas lorsque $a = 1$ et $b = -\frac{1}{6}$.