Théorème. (Burnside, Références : M. Alessandri, Thèmes de géométrie ou Oraux X-ENS, Algbre 2, exercice 3.6 p. 171)
Soit G un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini. C'est-à-dire qu'il existe $m \geq 1$ tel que pour tout $M \in G, M^m = I$. Alors G est fini.

Preuve :

1. Montrer que l'ensemble des traces des éléments de G est fini et que tout élément de G est diagonalisable.
2. Soit A et B deux éléments de G tel que pour tout M de G : $tr(AM) = tr(BM)$.
   (a) Montrer que pour tout $k \geq 1, \mathrm{tr}(\mathrm{AB}^{-1})^{\mathrm{k}} = \mathrm{n}$.
   (b) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, $M - I$ est nilpotente ssi $tr(M^k) = n$ pour $k = 1, \ldots, n$.
   (c) En déduire que $A = B$.
3. Soit V le s.e.v de $M_n(\mathbb{C})$ engendré par G et soit $\{C_i\}, i = 1, \ldots, r = \dim V$, une base de V. Montrer que l'application $G \to \mathbb{C}^r$, $A \to (\mathrm{tr}(\mathrm{AC_j}), \mathrm{j} = 1, \ldots, \mathrm{r}$, est injective.
4. Conclure.

Exercice : Montrer que si $G \subset \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est fini alors il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $PGP^{-1} \subset U(n)$. (Indice : Construire un produit scalaire hermitien G invariant).

Compléments :
Théorème. (Schur, Références : M. Alessandri, Thèmes de géométrie)
Soit G un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ de torsion et de type fini. Alors G est fini.