UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2010/2011**
Faculté des Sciences Préparation à l'agrégation
Département de Mathématiques Développement : Décomposition de Dunford et applications
Références : X. Gourdon, Algèbre)

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Le but de ce dévelopement est de donner une démonstration et quelques applications du théorème suivant :

(Décomposition de Dunford.) *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que le polynôme caractéristique χ_f de f soit scindé alors il existe un unique couple $d, n \in \mathcal{L}(E)$ tel que*

(i) $f = d + n$

(ii) *d est diagonalisable et n est nilpotent*

(iii) *d et n commutent*

En plus d est n sont polynômes en f.

Échauffement :

1. Soit $f = d + n$ la décomposition de Dunford de $f \in \mathcal{L}(E)$. Soir $E_\lambda = \ker(f - \lambda I_E)^{\omega_\lambda}$ le sous-espace caractéristique correspondant à la valeur propre λ. Montrer que E_λ est stable par f, par d, et par n.
2. Montrer que réciproquement si $f \in \mathcal{L}(E)$ admet une décomposition de Dunford alors χ_f est scindé.
3. Est-ce que
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
est la décomposition de Dunford de A ?

Applications :

1. (Calcul des puissances d'un endomorphisme). Une fois donnée la décomposition de Dunford $f = d + n$, on a, si k est l'indice de nilpotence de n :
$$f^s = \sum_{i=0}^{\min(s,k-1)} \binom{s}{i} d^{s-i} n^i.$$
2. Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. L'exponentielle d'un endormorphisme $f = d + n$ est alors définie et l'on a $exp(f) = exp(d)exp(n)$ avec, si k est l'indice de nilpotence de n : $\exp(n) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} n^j$.
3. Si $A \in GL_n(\mathbb{C})$ alors il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = \exp B$.
(Indice : Réduire au cas $A = I + N$, où N est nilpotent. Considérer $D(t) = \log(I + tN) = tN - \frac{t^2N^2}{2} + \cdots + (-1)^k \frac{t^{k-1}N^{k-1}}{k-1}$. Si $S(t) = \exp D(t)$ montrer que $S''(t) = 0$. En déduire que $I + N = S(1) = \exp D(1)$.)
4. Déterminer l'ensemble des matrices $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $I = \exp B$.
5. Soient $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'existence d'une matrice $B \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = B^p$.
(Indice : Si $A = \exp M$ considérer $\exp(M/p)$)
6. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe.

7. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et le polynôme caractéristique de A est scindé alors A est diagonalisable ssi $\exp A$ est diagonalisable.
8. Si le rayon spectrale de $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est plus petit que 1 alors $B^k \to 0$ si $k \to \infty$.
9. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ alors la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est bornée ssi A est diagonalisable et $Sp(A) \subset \mathbf{S}^1$.

Démonstration.

1. Lemme des noyaux : *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1, \dots P_s \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes 2-à-2 premiers entre eux. Alors*
   (i) les sous-espaces propres $E_i = \ker P_i(f)$ sont en somme directe.
   (ii) $\bigoplus \ker P_i(f) = \ker(P_1P_2\cdots P_s)(f)$
   (iii) les projecteurs associés à cette somme directe sont polynômes en f.

   Démontrer le lemme de noyaux pour $s = 2$ (utiliser l'identité de Bezout dans $\mathbb{K}[X]$).
2. (Critère de codiagonalisation ou de diagonalisation simultanée) : Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Alors f et g sont diagonalisables et commutent ssi il existe une base de E dans laquelle f et g soient tout deux diagonaux.
3. Soit $\chi_f = (X - \lambda)^{\omega_\lambda}$. Montrer que $d = \lambda_E$ et $n = f - d$ est une décomposition de Dunford.
4. Soit $\chi_f = \prod_i (X - \lambda_i)^{\omega_i}$. Utiliser le lemme des noyaux pour construire d et $n = f - d$.
5. (unicité) Si $f = d + n = d' + n'$. Montrer que d et d' commutent. En déduire que $d - d'$ est diagonalisable. Montrer que $n - n'$ est nilpotent. Conclure.