No.
Date.

Ch. VIII Formes bilinéaires.

VIII 1. Généralités

Définition: Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. On dit qu'une application

$$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$$

est une forme bilinéaire si pour tout $x \in E$, l'application $\varphi(x,\cdot) : y \to \varphi(x,y)$ est linéaire et si pour tout $y \in E$, l'application $\varphi(\cdot,y) : x \to \varphi(x,y)$ est linéaire.

On dit que φ est :

symétrique	si	$\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$	pour tout x,y
alternée	si	$\varphi(x,x) = 0$	pour tout x
antisymétrique	si	$\varphi(x,y) = -\varphi(y,x)$	pour tout x,y
réflexive	si	$\varphi(x,y) = 0 \Rightarrow \varphi(y,x) = 0$	

Remarques : a) antisymétrique $\Rightarrow$ alternée
b) alternée $\Rightarrow$ antisymétrique si car $K \neq 2$
c) symétrique ou antisymétrique $\Rightarrow$ réflexive

Ecriture en dimension finie

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, φ est déterminée par $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$ et on a

$$\varphi(x,y) = {}^tX A Y \quad , \quad A = (a_{ij})$$

où $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ si $x = \sum_1 x_i e_i$ et $Y = {}^t(y_1, \dots, y_n)$ si $y = \sum_1 x_i e_i$

La matrice A s'appelle la matrice de φ relativement à la base (e_i).

Soit $\beta = (e_1, \dots, e_n)$, $\beta' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ deux bases de E et soient A, resp. A', la matrice de φ rel. à la base β, resp. β' alors

$$A' = {}^tPAP$$

où P la matrice de passage de β à β'. On dit que les matrices A et A' sont congrues.

Remarque φ est symétrique (resp. antisymétrique) ssi A est symétrique resp. antisymétrique.

No.
Date.

Formes non-dégénérées.

On dit que φ est non dégénérée si l'application $\bar{\varphi}: E \to E^*$ définie par $\bar{\varphi}(y) = \varphi_y : E \to \mathbb{K}$

$$\varphi_y(x) = \varphi(x,y)$$

est injective c.à.d si $\operatorname{Ker} \bar{\varphi}$ est nul, où

$$\operatorname{Ker} \bar{\varphi} = \{ y \in E \mid \forall_{x \in E} \ \varphi(x,y) = 0 \}$$

Par abus de langage, les s.e.v $\operatorname{Ker} \bar{\varphi}$ de E s'appelle le noyau de φ.

Rq. Cette définition n'est pas symétrique en x et y. Elle est symétrique dans deux cas suivants
1) φ est réflexive. Dans ce cas la notion du noyau est symétrique aussi.
2) $\dim E < +\infty$. Dans ce cas φ est non dégénérée ssi la matrice de φ est inversible.

Formes quadratiques

On suppose car $\mathbb{K} \neq 2$.

Définition On appelle forme quadratique sur E tout application de la forme $q: E \to \mathbb{K}$

$$q(x) = \varphi(x,x)$$

où φ est une forme bilinéaire sur E.

Proposition
Soit q une forme quadratique. Il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ t.q. $\forall_{x \in E}$ $q(x) = \varphi(x,x)$. La forme s'appelle la forme polaire de q. Elle est définie par

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right]$$

Déf. Soit $\dim E < +\infty$. Le rang de q = le rang φ = le rang de la matrice de φ.

Par le théorème du rang. $\operatorname{rang} \varphi = n - \dim \ker \bar{\varphi}$

No.
Date.

VIII 2. Orthogonalité. Cas général.

On va supposer que φ est réflexive.

Soit $A \subset E$ un sous ensemble. On définit

$$A^\perp = \{ y \in E \mid \varphi(x,y) = 0 \text{ pour tout } x \in A \}$$

$A^\perp$ est un s.e.v de E.

Propriétés :

1) $A^\perp = (\mathrm{Vect}A)^\perp$
2) $A \subset B \Rightarrow A^\perp \supset B^\perp$
3) $A \subset (A^\perp)^\perp$.
4) Supposons $\dim E < \infty$.
Soit $B = \overline{\varphi}(A)$. Alors $A^\perp = B^\perp$ (au sens dual)

En effet, $y \in A^\perp \Leftrightarrow \forall_{x\in A}\ \varphi(x,y) = 0 \overset{\text{réflexivité}}{\Leftrightarrow} \forall_{x\in A}\ \varphi(y,x) = 0 \Leftrightarrow \forall_{x\in A}\ \overline{\varphi}(x)(y) = 0$

$\Leftrightarrow y \in (\overline{\varphi}(A))^\perp$

Proposition Supposons $\dim E < +\infty$.
Soit F un s.e.v de E. Alors
(i) $\dim F + \dim F^\perp = \dim E + \dim(F \cap \mathrm{Ker}\,\overline{\varphi})$
(ii) $F^{\perp\perp} = F + \mathrm{Ker}\,\overline{\varphi}$.

Preuve
(i) $\dim \overline{\varphi}(F) = \dim F - \dim(F \cap \mathrm{Ker}\,\overline{\varphi})$
Par la propriété 4)
$\dim F^\perp = \dim(\overline{\varphi}(F))^\perp = \dim E - \dim F + \dim(F \cap \mathrm{Ker}\,\overline{\varphi})$

(ii) On a $F \subset F^{\perp\perp}$ et $\mathrm{Ker}\,\overline{\varphi} \subset F^{\perp\perp}$. D'où $F + \mathrm{Ker}\,\overline{\varphi} \subset F^{\perp\perp}$ et

$$\dim F^\perp + \dim F^{\perp\perp} = \dim E + \dim(F^\perp \cap \mathrm{Ker}\,\overline{\varphi})$$

$$= \dim E + \dim \mathrm{Ker}\,\overline{\varphi}$$

(puisque $\mathrm{Ker}\,\overline{\varphi} \subset F^\perp$)

$\dim F^{\perp\perp} = \dim E - \dim F^\perp + \dim \mathrm{Ker}\,\overline{\varphi} = \dim F + \dim \mathrm{Ker}\,\overline{\varphi} - \dim \mathrm{Ker}\,\overline{\varphi} \cap F$
$= \dim F + \mathrm{Ker}\,\overline{\varphi}$

ça montre $F^{\perp\perp} = F + \mathrm{Ker}\,\overline{\varphi}$

No.
Date.

Définition.
On dit que $x \in E$ est isotrope (par φ) si $\varphi(x,x)=0$.
On appelle cône isotrope de φ l'ensemble
$$C_\varphi = \{x \in E \mid \varphi(x,x)=0\}$$
Soit F un s.e.v de E. F est dit isotrope si $F \cap F^\perp \neq \{0\}$
F est dit totalement isotrope si $F \subset F^\perp$.

On dit que φ est anisotrope si $C_\varphi = \{0\}$.

Rq. φ anisotrope $\Rightarrow$ φ non dégénérée.

Définition On dit qu'une base $\mathcal{B}$ de E est φ-orthogonale si pour tout couple d'éléments distincts e, e' de $\mathcal{B}$, $\varphi(e,e')=0$

Théorème Si $\dim E < +\infty$ alors il existe une base orthogonale de E.

Preuve : récurrence sur $\dim E$. $\dim E = 1$ évident.
Supposons le résultat vrai pour la dimension $< \dim E$.
- Si $\varphi \equiv 0$ alors toute base est orthogonale.
- Si $\varphi \not\equiv 0$ il existe $x \in E$ t.q. $f = \varphi(x,\cdot) \in E^*$, $f \neq 0$. Soit $H = \ker f$.
Par l'hypothèse de récurrence $\exists\, \mathcal{B}'$ orthogonale de H. Alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \{x\}$. $\square$

Corollaire. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors $\exists P$ inversible t.q. ${}^tPAP$ soit diagonale.

Méthode de Gauss de diagonalisation d'une forme quadratique
$$q(x) = \sum_{i \le j} a_{ij} x_i x_j$$

Cas 1 $\exists i$ $a_{ii} \neq 0$. Supposons $i=1$, $a = a_{11} \neq 0$.
$$q(x) = a x_1^2 + x_1 B(x_2, \dots, x_n) + C(x_2, \dots, x_n) = a\left(x_1 + \frac{B(x_2,\dots,x_n)}{2a}\right)^2 + \underbrace{\left[C(x_2,\dots,x_n) - \frac{B(x_2,\dots,x_n)^2}{4a}\right]}_{q'(x_2,\dots,x_n)}$$
et on procède par récurrence

Cas 2 $\forall i$ $a_{ii}=0$ et $\exists i,j$ $a_{ij} \neq 0$. On suppose $a = a_{12} \neq 0$
$$q(x) = a x_1 x_2 + x_1 B(x_3, \dots, x_n) + x_2 C(x_3, \dots, x_n) + D(x_3, \dots, x_n) =$$
$$= \frac{a}{4}\left[\left(x_1 + x_2 + \frac{B+C}{a}\right)^2 - \left(x_1 - x_2 + \frac{C-B}{a}\right)^2\right] + \left[D - \frac{BC}{a}\right]$$

Conclusion : $q = \sum_{i=1}^{r} (l_i(x))^2$, où $l_1, \dots, l_r$ formes indépendantes de E^*
$$r = \mathrm{rg}\, q \le \dim E.$$

No.
Date.

VI/13. Orthogonalité. Cas non dégénéré

On suppose φ reflexive et non dégénérée et $\dim E < +\infty$

Proposition
Soit $\dim E < \infty$ et soit φ reflexive et non dégénérée. Alors φ est symétrique ou antisymétrique.

Preuve
Considerons $\overline{\varphi} : E \to E^*$ $\overline{\varphi}(y)(x) = \varphi(x,y)$ et $\overline{\Psi} : E \to E^*$, $\overline{\Psi}(x)(y) = \varphi(x,y)$

Alors par l'hypothèse $\overline{\varphi}$ et $\overline{\Psi}$ sont des isomorphismes.
Par réflexivité $\forall_x \exists \lambda_x \in \mathbb{K}^*$ $\overline{\varphi}(x) = \lambda_x \overline{\Psi}(x)$

Soit $f : E \to E$ définie par $f(x) = \overline{\Psi}^{-1}(\overline{\varphi}(x))$. Alors $\forall x$

$$f(x) = \lambda_x x$$

D'où f est une homothétie (puisque $\dim E > 1$)

$$\exists_\lambda \forall_x \quad f(x) = \lambda x$$

c.à.d $\forall_{x,y}$ $\varphi(x,y) = \overline{\varphi}(y)(x) = \overline{\Psi}(x)(y)$

$$= \lambda \overline{\Psi}(y)(x) = \lambda \varphi(y,x)$$

D'où $\lambda^2 = 1$ c.à.d $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. $\square$

Proposition Soient F, G des s.e.v de E. Alors
a) $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$
b) $F^{\perp\perp} = F$
c) $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
d) $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

Corollaire 1) Si F totalement isotrope $(F \subset F^\perp)$ alors $\dim F \leq \frac{1}{2} \dim E$
2) Si F est isotrope $(F \cap F^\perp \neq \{0\})$ alors $F \cap F^\perp$ est totalement isotrope.
3) Si F est non isotrope $(F \cap F^\perp = \{0\})$ alors $E = F \oplus F^\perp$. Dans ce cas on écrit

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$$