Déterminants

Exercice 1. — Soient $A_1(x_1;y_1), A_2(x_2;y_2)$ et $A_3(x_3;y_3)$ des points du plan (euclidien).

a) Calculer (en moins d'une minute) l'aire du triangle $A_1A_2A_3$.

b) Montrer que ces points sont alignés ssi $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

c) On suppose que ces points sont non alignés. Montrer que l'équation du cercle circonsrit à ces points est $\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x^2+y^2 & x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$

Exercice 2. — Soient $\mathcal{D}_i(a_ix+b_iy+c_i=0)$, $i=1,2,3$, trois droites du plan (euclidien). Montrer que ces trois droites sont concourentes ou parallèles ssi $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.

Exercice 3. — Calculer le déterminant des endomorphismes de $M_n(k)$ suivants :

a) $M \mapsto {}^tM$.

b) Pour A et B fixés, $M \mapsto AMB$.
[**Indication:** Commencer par $A = I_n$.]

Exercice 4. — Calculer les déterminants suivants :

a) $|(1+x_iy_j)|$

b) $|(|\alpha_i-\alpha_j|)|$ avec $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n$ réels.

c) Déterminant circulant :

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$$

[**Indication:** La matrice est un polynôme en $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix}$, qui est diagonalisable.]

d) Déterminant de Vandermonde :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_n \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 & \dots & \theta_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \theta_1^{n-1} & \theta_2^{n-1} & \dots & \theta_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Exercice 5. — Soient x, y, z des scalaires. On souhaite calculer le déterminant d'ordre n :

$$D(x,y,z) := \begin{vmatrix} x & y & \dots & y \\ z & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y \\ z & \dots & z & x \end{vmatrix}.$$

a) Montrer que la fonction $\lambda \mapsto D(x+\lambda, y+\lambda, z+\lambda)$ est polynomiale de degré $\leqslant 1$.

b) En déduire la valeur de $D(x,y,z)$ lorsque $y \neq z$.

c) Donner la valeur de $D(x,y,z)$ dans tous les cas.

Exercice 6. — Soit $A \in \mathcal{M}_n(k)$ tel que $A^2 = -\mathrm{id}$ (resp. A est inversible et $\ {}^tA = -A$). Montrer que n est pair.

Exercice 7. — Soit $A \in \mathrm{GL}_n(k)$. Montrer que pour toute partie $I \subset \{1, \dots n\}$, il existe une partie $J \subset \{1, \dots n\}$ de même cardinal telle que le mineur dét $A_{I,J} \neq 0$.

Exercice 8. — Pour p premier, quels sont les morphismes de groupes $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}/p) \to (\mathbf{Z}/p)^\times$? [**Indication:** Les matrices de dilatation et de transvection engendrent GL_n. Quel est l'ordre d'une matrice de transvection ?]

Exercice 9. — Soit E un espace vectoriel de dimension n. Pour $\ell \in \mathbf{N}$, quelle est la dimension de l'espace vectoriel des formes ℓ-linéaires alternées $\lambda : E^\ell \to k$?

Exercice 10. — Soit A un anneau commutatif. On note $M_n(A)$ l'anneau des matrices carrées à coefficients dans A, et on dit que $M \in \mathrm{M}_n(A)$ est inversible s'il existe $B \in M_n(A)$ telle que l'on ait $AB = BA = \mathrm{id}$.
Montrer que M est inversible dans $M_n(A)$ ssi le scalaire dét M est inversible dans A.

Exercice 11. — Soit $P : \mathbf{C} \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ une application telle que chacune des coordonnées $z \mapsto P_{i,j}(z)$ soit polynomiale.

a) Montrer que l'application $z \mapsto$ dét $P(z)$ est constante.

b) Montrer que les polynômes $P_{1,1}, P_{1,2}, \dots, P_{1,n}$ sont dans leur ensemble premiers entre eux.

c) En déduire que P est produit d'une matrice constante et de matrices de transvection à coefficients polynômiaux, c'est-à -dire qu'il existe une matrice $P_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, des polynômes $Q_1, \dots Q_N \in \mathbf{C}[X]$ et des indices $i_1, j_1, \dots, i_N, j_N$ tels que $P = P_0 T_{i_1,j_1}(Q_1) \cdots T_{i_N,j_N}(Q_N)$. [**Indication:** Généraliser l'algorithme de Gauss en utilisant l'algorithme d'Euclide.]

Exercice 12. — Soit $A \in M_n(k)$. Quel est le rang de la comatrice de A ? Quel est sont déterminant ? Si $P \in GL_n(k)$, exprimer la comatrice de $P^{-1}AP$ en fonction de celle de A.
On suppose que les matices A et B commutent. Montrer que les comatrices de A et B commutent.

Exercice 13. — Soient a, b, c trois paramètres et $n \geqslant 1$ un entier. Montrer que la suite

$$D_n := \begin{vmatrix} a & c & & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c \\ 0 & & b & a \end{vmatrix} \quad \text{(déterminant d'ordre } n\text{)}$$

satisfait une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. En déduire que pour $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$,

$$\begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}.$$

Exercice 14. — Les espaces matriciels sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ sont munis de leur topologie "usuelle".

a) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ sont des ouverts. Déterminer leurs composantes connexes.

b) Pour p un entier $\leqslant n$, montrer que l'ensemble des matrices de rang $\leqslant p$ est un fermé.

c) Déterminer l'intérieur et l'adhérence de l'ensemble des matrices de rang p.

Exercice 15. — Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice compagnon

$$C := \begin{bmatrix} 0 & 0 & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Exercice 16. — Soient $A \in M_{m,n}(k)$ et $B \in M_{n,m}(k)$ des matrices (non carrées !).
Montrer que l'on peut passer de $\begin{bmatrix} X \cdot \mathrm{id}_m + AB & 0 \\ 0 & X \cdot \mathrm{id}_n \end{bmatrix}$ à $\begin{bmatrix} X \cdot \mathrm{id}_m & 0 \\ 0 & X \cdot \mathrm{id}_n + BA \end{bmatrix}$ par une suite d'opérations élémentaires.
En déduire une relation entre les polynômes caractéristiques χ_{AB} et χ_{BA}.

Exercice 17. — Soient k un corps de caractéristique $\neq 2$, E un k-ev de dimension n et $\mathrm{A}^n(E)$ l'espace des formes n-linéaires alternées.

a) Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{A}^n(E)$. Montrer que

$$\lambda_u : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda(x_1, \ldots, x_{i-1}, u(x_i), x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

est une forme n-linéaire alternée.

b) Montrer que l'on a $\lambda_u = \mathrm{tr}(u)\lambda$.

Exercice 18. — Pour $A, B, C, D \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ on pose $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$. Montrer que si les blocs C et D commutent alors dét $M =$ dét $(AD - BC)$.
[**Indication:** Etablir d'abord la formule (dét M − dét $(AD - BC)$)dét $D = 0$.]

Exercice 19. — Pour $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$, on pose $\tilde{M} := \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbf{R})$ et $M = A + iB \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que l'on a dét $\tilde{M} = |$dét $M|^2$.

Exercice 20. — Soient des matrices $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbf{Z})$ telles que les déterminants dét A et dét B sont premières entre eux. Montrer qu'il existe $U, V \in \mathrm{M}_n(\mathbf{Z})$ telles que $UA + BV = 1$.

Exercice 21. — **Résultant de deux polynômes**
On fixe deux entiers $m > 0$ et $n > 0$ et l'on note $E := k[X]_{<m} \times k[X]_{<n}$. Soient A un polynôme de degré exactement n et B un polynôme de degré exactement m. Pour tout couple $(U_1, U_2) \in E$, on pose $\Phi_{A,B}(U_1, U_2) := AU_1 + BU_2$; on définit ainsi un morphisme d'ev $\Phi_{A,B} : E \to k[X]_{<n+m}$.

a) Montrer que $\Phi_{A,B}$ est injectif ssi A et B sont premiers entre eux.
Plus généralement, exprimer $\deg(\mathrm{pgcd}(A, B))$ en fonction de $\Phi_{A,B}$.

b) Retrouver ainsi que A et B sont premiers entre eux ss'il existe un (unique) couple $(U, V) \in E$ tel que $AU + BV = 1$.

c) Écrire la matrice de $\Phi_{A,B}$ (dans des bases que vous choisirez) et en déduire une CNS sur les coefficients de A et B pour qu'ils soient premiers entre eux.

d) à quelle condition sur ses coefficients un polynôme est-il à racines simples (sur $\overline{k}$) ?
Application numérique pour $aX^2 + bX + c$ et $X^3 - pX + q$.

Exercice 22. — **[Norme]**
Soit $d \in \mathbf{Z}$ un entier qui n'est pas un carré parfait.

a) Justifier que l'anneau $\mathbf{Q}[\sqrt{d}] := \{a + b\sqrt{d},\ a, b \in \mathbf{Q}\}$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension 2 dont une base est $\{1, \sqrt{d}\}$. (En particulier les coefficients a et b ci-dessus sont uniques.)

b) Soit $N : \mathbf{Z}[\sqrt{d}] \to \mathbf{Z}$ l'application $a + b\sqrt{d} \to a^2 - db^2$ et soit $\alpha \in \mathbf{Z}[\sqrt{d}]$. Justifier que l'application $m_\alpha : \mathbf{Q}[\sqrt{d}] \to \mathbf{Q}[\sqrt{d}]$, $x \mapsto \alpha \cdot x$ est $\mathbf{Q}$-linéaire et calculer son déterminant.

c) En déduire (sans calcul) que pour $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}[\sqrt{d}]$ on a $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$. (On dit que N est *multiplicative*.) Que retrouve-t-on si $d < 0$?

d) Montrer qu'un élément $\alpha \in \mathbf{Z}[\sqrt{d}]$ est inversible ssi $N(\alpha) = 1$ ou $N(\alpha) = -1$.

e) Soit $\alpha \in \mathbf{Z}[\sqrt{d}]$ tel que $|N(\alpha)|$ soit un nombre premier. Montrer que α est irréductible.