Exponentielle matricielle

Exercice 1. — Montrer que pour tout $M \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, on a dét $\exp(\mathrm{M}) = \exp(\mathrm{tr}(M))$.
Est-ce encore valable pour $M \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$?

Exercice 2. — Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ (dépendant de A) tel que l'on ait $\exp(A) = P(A)$.
Préciser P lorsque A est diagonalisable.

Exercice 3. — Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$. Calculer $\exp(A)$.

Exercice 4. — Si A et B commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. Donner des matrices $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ pour lesquelles $\exp(A+B) \neq \exp(A)\exp(B)$

Exercice 5. — **a)** Montrer que l'exponentielle (complexe ou réelle) envoie *homéomorphiquement* l'ensemble des matrices nilpotentes sur l'ensemble des matrices unipotentes (*i.e.* de la forme $\mathrm{id} + N$ avec N nilpotente).
[**Indication:** Pour $n \geqslant 1$, soient les polynômes $E_n := 1 + X + \cdots + \frac{X^n}{n!}$ et $L_n := X - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{X^n}{n}$. Montrer qu'il existe des polynômes $P_n, Q_n \in \mathbf{C}[X]$ tels que l'on ait $E_n \circ L_n = 1 + X + X^n P_n$ et $L_n \circ (E_n - 1) = X + X^n Q_n$.]

b) En déduire que l'application $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est surjective.
Plus précisément, montrer que pour tout $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, il existe un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $M = \exp(P(M))$.

c) L'exponentielle complexe est-elle injective ?

d) L'application $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est-elle surjective (resp. injective) ?
Montrer que $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est dans l'image de l'exponentielle ss'il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $M = A^2$.
[**Indication:** Pour la réciproque, écrire $A = \exp(B)$ avec $B = P(A) \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ comme en *a)*. On a $M = A\overline{A}$.]

e) Les matrices suivantes sont-elles dans l'image de l'exponentielle réelle :

$$-\mathrm{id}_n, \qquad A := \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

Exercice 6. — **Une preuve topologique de la surjectivité de l'exponentielle**
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ dont on veut trouver un antécédent par l'exponentielle. Notons $\mathcal{A} := \mathbf{C}[A]$ la sous-algèbre de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ et $\mathcal{A}^\times := \mathcal{A} \cap \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

a) Montrer que $\mathcal{A}^\times$ est un ouvert connexe de $\mathcal{A}$.

b) Montrer que l'image $\exp(\mathcal{A})$ est un sous-groupe de $\mathcal{A}^\times$ qui contient un voisinage ouvert de l'identité.
[**Indication:** Utiliser le théorème d'inversion locale.]

c) En déduire que $\exp(\mathcal{A})$ et son complémentaire sont ouverts.

d) Conclure qu'il existe $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $\exp(P(A)) = A$.

Exercice 7. — Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$.

a) Calculer la décomposition de Dunford de $\exp(A)$ en fonction de celle de A.

b) En déduire que A est diagonalisable ssi $\exp(A)$ l'est.

c) Donner tous les antécédents par l'exponentielle complexe de id_n.

Exercice 8. — **Sous-groupes à un paramètre**
Soit $f : (\mathbf{R}, +) \to (\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \cdot)$ un morphisme de groupes continu. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ telle que l'on ait : $\forall t \in \mathbf{R},\ f(t) = \exp(tM)$.

a) Que vaut $f(0)$?

b) Montrer le résultat en supposant f dérivable.

c) Montrer que pour tous $s, t \in \mathbf{R}$ et pour tout $a > 0$, on a $f(s) \int_0^a f(t)\mathrm{d}t = \int_s^{s+a} f(t)\mathrm{d}t$.

d) Montrer que pour a suffisamment petit, $\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$ est inversible. En déduire que f est dérivable et conclure.
[**Indication:** Montrer que pour a petit, $\frac{1}{a}\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$ est proche de id_n.]
