

Réduction des endomorphismes

I. Polynômes d'endomorphismes

Exercice 1. — Quels sont les endomorphismes dont le polynôme minimal est de degré 1 ?

Exercice 2. — Déterminer le polynôme minimal de la matrice **compagnon**

$$C := \begin{bmatrix} 0 & 0 & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Montrer que le commutant de C (c'est-à-dire l'ensemble des matrices qui commutent à C) est $k[C] := \{P(C), P \in k[X]\}$.

Exercice 3. — Soient $k \subset k'$ deux corps et $M \in M_n(k) \subset M_n(k')$. Montrer que le polynôme minimal de M est le même sur k et sur k' .

Exercice 4. — Soient A et B dans $M_n(\mathbf{C})$. Montrer que les polynômes caractéristiques χ_{AB} et χ_{BA} sont égaux. Les polynômes minimaux π_{AB} et π_{BA} sont-ils égaux ?
Même question pour A et B dans $M_n(\mathbf{K})$ pour un corps \mathbf{K} quelconque.

Exercice 5. — Pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} , montrer que l'application $A \mapsto \chi_A$ est continue, mais que $M \mapsto \pi_M$ ne l'est pas.

Montrer que l'ensemble des points de continuité de π est $\{M \in M_n(\mathbf{K}), \chi_M = \pi_M\}$.

[**Indication:** Montrer que c'est un ouvert de $M_n(\mathbf{K})$.]

Exercice 6. — Soient A et $B \in M_n(\mathbf{C})$. Montrer que l'on a $\chi_A = \chi_B$ ssi $\forall k, \operatorname{tr}(A^k) = \operatorname{tr}(B^k)$.

Exercice 7. — Donner un exemple de matrices non semblables qui ont même polynôme minimal et même polynôme caractéristique.

Exercice 8. — Soit $M \in M_n(\mathbf{C})$ telle que $M^4 - 4M^3 + 3M^2 = 0$. Montrer que $\operatorname{tr}(M) \in \mathbf{Z}$.

Exercice 9. — Soit $A \in \operatorname{GL}_n(\mathbf{K})$. Montrer que A^{-1} est un polynôme en A .

Exercice 10. — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $x \in E$, on pose $E_x = \{P(u)(x), P \in \mathbf{K}[X]\}$.

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire π_x de $\mathbf{K}[X]$ tel que $P(u)(x) = 0$ ssi $\pi_x | P$.

b) Montrer que E_x est le plus petit sous-espace de E stable par u et contenant x . Montrer que $\pi_x | \pi_u$ et que E_x est un espace de dimension $d_x := \deg(\pi_x)$. Expliciter la matrice de $u|_{E_x}$ dans la base $(x, u(x), \dots, u^{d_x-1}(x))$. Montrer (sans utiliser Cayley-Hamilton) que π_x divise χ_u et retrouver ainsi le théorème de Cayley-Hamilton.

c) Montrer que si $E_x \cap E_y = \{0\}$ alors $\pi_{x+y} = \operatorname{ppcm}(\pi_x, \pi_y)$. Montrer que si π_x et π_y sont premiers entre eux alors $E_{x+y} = E_x \oplus E_y$.

Donner une interprétation matricielle de ce résultat en termes de matrices compagnons.

d) Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P | \pi_u$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\pi_x = P$.

[**Indication:** Commencer par le cas où P est une puissance d'un polynôme irréductible.]

e) **Application :** Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\pi_u = \chi_u$,

(ii) u est **cyclique** (c.-à.-d. il existe x tel que $E_x = E$),

(iii) il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est une matrice compagnon.

Exercice 11. — Soit E un k -ev de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent tel que $\dim \ker u = 1$. Montrer que $\pi_u = X^n$.

Exercice 12. — Soit u un endomorphisme de E de dimension n . Montrer que l'on a $\pi_u \mid \chi_u \mid \pi_u^n$. En déduire que π_u et χ_u ont les mêmes facteurs irréductibles (avec des multiplicités différentes).

Exercice 13. — Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et P_σ la matrice de permutation associée. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de P_σ .

II. Endomorphismes nilpotents

Exercice 14. — Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent alors $\text{id} + u$ est inversible.

Exercice 15. — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Montrer que u est nilpotent ss'il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle $\text{Mat}_{\mathcal{B}}u$ soit triangulaire supérieure stricte. En déduire que l'indice de nilpotence de u est toujours inférieur ou égal à $\dim E$.

Applications :

la matrice $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbf{C})$ est-elle un carré dans $M_3(\mathbf{C})$?

Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes est un fermé de $M_n(\mathbf{C})$.

Exercice 16. — Soit $M \in M_n(k)$. Montrer que M est nilpotente ssi $\forall i \geq 1 \text{tr}(M^i) = 0$.

Exercice 17. — Soient k un corps infini et $A, B \in M_n(k)$ deux matrices. On suppose qu'il existe $n + 1$ scalaires distincts $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que pour tout i , $A + \lambda_i B$ est nilpotente. Montrer qu'alors A et B sont nilpotentes.

[Indication: Considérer le polynôme à deux variables $\det(A + \Lambda B - X \text{id}) \in k[\Lambda, X]$.]

Exercice 18. — Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}?$$

Exercice 19. — Réduction de Jordan des nilpotents

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice $d + 1$ (c'est-à-dire tel que $u^{d+1} = 0$ et $u^d \neq 0$). Pour tout $k \geq 0$, on pose $N_k := \ker u^k$.

- a) Montrer que l'on a une suite d'inclusions strictes $0 = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \dots \subsetneq N_{d+1} = E$ et que la suite $\dim N_i - \dim N_{i-1}$ est décroissante.
- b) Soit F_d un supplémentaire de N_d dans $N_{d+1} = E$ et soit (e_1, \dots, e_{i_d}) une base de F_d . Montrer que la famille $\{e_1, u(e_1), \dots, u^d(e_1), e_2, u(e_2), \dots, u^d(e_{i_d})\}$ est libre. Montrer que $\text{Vect}\{e_1, u(e_1), \dots, u^d(e_1)\}$ est stable par u . Quelle est, dans cette base, la matrice de la restriction de u à cet espace ?
- c) Montrer que l'on peut itérer le procédé et en déduire l'existence d'une base de Jordan.
- d) Montrer que deux matrices nilpotentes A et B sont semblables ssi pour tout $k \geq 0$, on a $\dim \ker A^k = \dim \ker B^k$.

Exercice 20. — Soit $J_n \in M_n(\mathbf{C})$ le bloc de Jordan de taille n .

Donner la réduction de Jordan de J_n^2 et préciser une base donnant cette réduction.

Exercice 21 (Mneimné, p. 35). — Soient A et B deux matrices nilpotentes. Montrer qu'elles sont semblables dans chacun des cas suivants :

- a) $\dim \ker A = \dim \ker B = 1$.
- b) A et B non nuls et $\dim \ker A^2 = \dim \ker B^2 = 3$.

Exercice 22. — Soit E un ev de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre n .

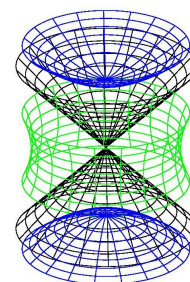
- Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $\{x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\}$ soit une base de E .
- Expliciter tous les sous-espaces de E stables par u .
[Indication: Il y en a $n + 1$.]
- Quels sous-espaces stables admettent un supplémentaire stable ?
- Montrer que pour u d'ordre $d < n$ l'ensemble des sous-espaces stables par u est infini (si le corps de base est infini).

Exercice 23. — Soit $M \in M_n(\mathbf{C})$. Montrer que 0 (la matrice nulle) est dans l'adhérence de la classe de conjugaison de M ssi M est nilpotente.

Exercice 24. — Combien y a-t-il de classes de similitudes de matrices nilpotentes dans $M_n(k)$?

Exercice 25 (Mneimné, p. 44). — **Géométrie du cône nilpotent en dimension 2.**
Soit $\mathcal{N}_2 \subset M_2(\mathbf{R})$ le sous-ensemble des matrices nilpotentes de dimension 2.

- Montrer que \mathcal{N}_2 est contenu dans l'espace vectoriel \mathcal{T} des matrices de trace nulle.
- Montrer que l'application $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathcal{T}, (x, y, z) \mapsto \begin{bmatrix} x & y+z \\ y-z & -x \end{bmatrix}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Dans la suite, on identifie ainsi \mathbf{R}^3 et \mathcal{T} .
- Montrer que \mathcal{N}_2 est un cône \mathcal{C} (au sens usuel) de \mathbf{R}^3 .
- Montrer que les classes de conjugaison des matrices inversibles diagonalisables (sur \mathbf{R}) de \mathcal{T} sont des hyperboloïdes à une nappe extérieurs au cône \mathcal{C} .
- Montrer que les classes de conjugaison des matrices inversibles non diagonalisables (sur \mathbf{R}) de \mathcal{T} sont des hyperboloïdes à 2 nappes intérieurs au cône \mathcal{C} .



III. Diagonalisabilité – trigonalisabilité

Exercice 26. — Donner des exemples de matrices de $M_n(\mathbf{C})$ non diagonalisables.
Donner des exemples de matrices de $M_n(\mathbf{R})$ non trigonalisables.

Exercice 27. — Montrer que pour toutes matrices A, B, C dans $M_2(k)$ on a :

$$(AB - BA)^2 C - C(AB - BA)^2 = 0.$$

[Indication: Pour éviter le calcul brutal, remarquer que $AB - BA$ est de trace nulle.]

Exercice 28. — Soient $n > 1$ un entier et X_1, \dots, X_n des indéterminées, k le corps $\mathbf{Q}(X_1, \dots, X_n)$, P le polynôme $(T - X_1) \cdots (T - X_n)$ de $k[T]$ et $C(P) \in M_n(k)$ sa matrice compagnon.

- Montrer que $C(P)$ est trigonalisable (et même diagonalisable) sur k .
- En déduire que les polynômes de Newton $N_p := X_1^p + \cdots + X_n^p$, $p \in \mathbf{N}^*$ sont des combinaisons linéaires (à coefficients entiers) des puissances des polynômes symétriques élémentaires. Plus précisément, montrer que pour tout $i \leq n$, on a $N_i = (-1)^i \sigma_i + P(\sigma_{<i})$.
- Retrouver ainsi que les polynômes de Newton N_1, \dots, N_n forment une base de l'algèbre des polynômes symétriques $\mathbf{Q}[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$.

Exercice 29. — Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Exercice 30. — Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de

$$\begin{array}{ccc} M_n(\mathbf{C}) & \rightarrow & M_n(\mathbf{C}) \\ M & \mapsto & {}^t M \end{array}$$

Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

Exercice 31. — Déterminer les valeurs et les espaces propres de l'endomorphisme :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X]_{\leq n} & \rightarrow & \mathbf{R}[X]_{\leq n} \\ P & \mapsto & (X^2 - 1)P'' - (2X + 1)P' \end{array}$$

Est-il diagonalisable ?

Exercice 32. — Montrer que $A \in M_n(\mathbf{C})$ est diagonalisable ssi ${}^t A$ l'est.

Plus généralement, en utilisant la réduction de Jordan ou celle de Frobenius, montrer que A est semblable à ${}^t A$.

Exercice 33. — Quels sont les endomorphismes nilpotents diagonalisables ?

Exercice 34. — Soient E un k -ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $F \subset E$ un sev stable par u . Montrer que si u est diagonalisable alors la restriction de $v := u|_F \in \mathcal{L}(F)$ est diagonalisable. Comparer les espaces propres de u et v .

Exercice 35. — Soient $k \geq 1$ et $A \in M_n(\mathbf{C})$ une matrice inversible telle que A^k soit diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable.

Qu'en est-il si A n'est pas inversible ? Si A est réelle ?

Exercice 36. — Soit \mathbf{F}_q un corps fini et $M \in M_n(\mathbf{F}_q)$. Montrer que M est diagonalisable ssi $M^q = M$.

Exercice 37. — Soient $A \in M_n(\mathbf{Z})$ et p un nombre premier.

Montrer que l'on a la congruence $\text{tr}(A^p) \equiv \text{tr}(A)[p]$.

[**Indication:** Considérer la réduction $\bar{A} \in M_n(\mathbf{F}_p)$ et commencer par traiter le cas où \bar{A} est trigonalisable.]

Exercice 38. — Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des scalaires deux à deux distincts et $n_1, \dots, n_r \geq 0$ des entiers. On pose $n = n_1 + \dots + n_r$. Soit D "la" matrice diagonale de $M_n(k)$ dont les valeurs propres sont les λ_i répétés avec multiplicité n_i .

a) Montrer que le stabilisateur de D pour l'action de $\text{GL}_n(k)$ par conjugaison est isomorphe à $\prod_{i=1}^r \text{GL}_{n_i}(k)$.

b) En déduire que le nombre de matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{F}_q)$ est

$$\sum_{n_1 + \dots + n_q = n} \frac{|\text{GL}_n(\mathbf{F}_q)|}{\prod_{i=1}^q |\text{GL}_{n_i}(\mathbf{F}_q)|}$$

où la somme porte sur toutes les décompositions de n en somme de q entiers ≥ 0 .

(N.B. : le groupe GL_0 est le groupe trivial à un élément).

Exercice 39. — Soit A et B deux éléments de $M_n(\mathbf{R})$. Montrer que A et B sont conjuguées dans $M_n(\mathbf{C})$ ssi elles sont conjuguées dans $M_n(\mathbf{R})$.

[**Indication:** Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On note Q et R les matrices de $M_n(\mathbf{R})$ telles que

$$P = Q + iR. \text{ Montrer que la fonction } f : \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \rightarrow & \mathbf{C} \\ z & \mapsto & \det(Q + zR) \end{array} \text{ est un polynôme non nul.}]$$

Exercice 40. — Montrer que le sous-espace des matrices diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbf{C})$. Quel est l'intérieur de l'espace des matrices diagonalisables ?

Le sous-espace des matrices diagonalisables (resp. trigonalisables) est-il dense dans $M_n(\mathbf{R})$?

Exercice 41. — Quel est le nombre de classes de similitude de symétries dans $GL_n(\mathbf{C})$?

En déduire que si $n \neq m$, alors les groupes $GL_n(\mathbf{C})$ et $GL_m(\mathbf{C})$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 42. — Soit $0 \leq r \leq n$. Montrer que l'ensemble des projecteurs de rang r dans $\mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$ est connexe par arcs. Et dans $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$?

[Indication: C'est une classe de similitude de matrices...]

Exercice 43. — Soient $M \in M_n(\mathbf{C})$ et $N \in M_n(\mathbf{R})$.

a) Montrer que la classe de similitude de M est connexe.

b) Montrer que la classe de similitude (dans $M_n(\mathbf{R})$) de N n'est pas connexe ssi $\text{Stab}_N := \{P \in GL_n(\mathbf{R}), PNP^{-1} = N\} \subset GL_n^+(\mathbf{R})$ et que dans ce cas elle a 2 composantes connexes.

Exercice 44. — Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$. Montrer que la classe de conjugaison de A dans $M_n(\mathbf{C})$ est fermée si et seulement si A est diagonalisable.

Exercice 45. — Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$. Montrer que la série $\sum_k A^k$ est convergente ssi $A^n \rightarrow 0$.

Exercice 46. — Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$. Montrer que dans la réduction de Jordan de A il y a autant de blocs pour une valeur propre $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ que pour sa conjuguée $\bar{\lambda}$.

Exercice 47. — Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbf{C})$, on définit une matrice par blocs $\Delta(A) := \begin{bmatrix} 0 & A \\ \text{Id}_n & 0 \end{bmatrix} \in M_{2n}(\mathbf{C})$. Soient $A, B \in M_n(\mathbf{C})$.

a) Montrer que les matrices $\Delta(A)$ et $\Delta(B)$ sont *équivalentes* ssi A et B le sont.

b) Montrer que les matrices $\Delta(A)$ et $\Delta(B)$ sont *semblables* ssi A et B le sont.

[Indication: Pour montrer $\Delta(A) \sim \Delta(B) \implies A \sim B$, on pourra calculer $\Delta(A)^2$ et utiliser le théorème de Jordan.]

IV. Décomposition de DUNFORD

Exercice 48. — Soit u un endomorphisme de polynôme caractéristique scindé ($\chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$).

a) En décomposant $\frac{1}{\chi_u}$ en éléments simples montrer qu'on obtient des polynômes Q_i tels que $1 = \sum_{i=1}^r Q_i P_i$, où $P_i = \prod_{j=1, j \neq i}^r (X - \lambda_j)^{\alpha_j}$. Montrer que $\pi_i = P_i Q_i(u)$ est le projecteur sur l'espace caractéristique associé à λ_i . En déduire que $d = \sum_i \lambda_i \pi_i$ et $n = u - d$.

b) Calculer la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Exercice 49. — Dans la méthode précédente, on a besoin de savoir factoriser un polynôme annulateur de u pour trouver les projecteurs spectraux puis d et n . On va voir une méthode ou une telle factorisation n'est pas utile. On reprend les notations de l'exercice précédent.

a) Montrer que le polynôme minimal de d est $P = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$ et que si k est de caractéristique 0 alors on a $P = \chi_u / (\chi_u \vee \chi'_u)$. Comment calculer P sans factoriser χ_u ?

On va donc chercher d dans $K[u]$ solution de $P(d) = 0$. Pour cela on applique la méthode de Newton. On pose $u_0 = u$ et $u_{n+1} = u_n - P(u_n) \circ (P'(u_n))^{-1}$.

b) On suppose $r \geq 2$. Montrer qu'il existe $Q \in K[X, Y]$ tel que

$$P(Y) = P(X) + (Y - X)P'(X) + (Y - X)^2 Q(X, Y)$$

c) Montrer que si $a \in k[u]$ est inversible dans $k[u]$ et $b \in k[u]$ est nilpotente, alors $a + b$ est inversible dans $k[u]$.

- d) Montrer que $P'(u)^{-1}$ est un polynôme en u et que $P(u)$ est nilpotent. En déduire que u_1 est bien défini et un polynôme en u , que $P(u_1)$ est nilpotent et que $P'(u_1)^{-1}$ est un polynôme en u . Itérer le procédé pour montrer que les u_i sont bien définis pour tout $i \in \mathbf{N}$ et des polynômes en u .
- e) Montrer que pour tout $l \geq 0$, $P(u_l) = P(u)^{2^l} v_l$ avec $v_l \in k[u]$. En déduire que la suite (u_l) est stationnaire, que la limite u_∞ est diagonalisable et que $u - u_\infty$ est nilpotent. En déduire que $d = u_\infty$ et $n = u - u_\infty$.

[Pour une version de cet exercice voir le sujet de l'année 2017]

V. Sous-espaces stables

Exercice 50. — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Quels sont les sous-espaces stables de u de dimension 1 ?

Exercice 51. — Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

Montrer que $\text{Vect}(e_1, e_2)$ est stable par A . Admet-il un supplémentaire stable ?

Exercice 52. — Soit E de dimension finie. Que dire d'un $u \in \mathcal{L}(E)$ qui stabilise tous les sous-espaces de E ?

Exercice 53. — Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$. Montrer que A admet un sous-espace stable de dimension 1 ou 2. Donner un exemple de A qui n'admet pas de sous-espace stable de dimension 1.

Exercice 54. — Soient u un endomorphisme de E , E_i les sous-espaces caractéristiques de u et $F \subset E$ un sous-espace stable par u .

- a) Montrer que l'on a $F = \bigoplus_i (E_i \cap F)$ et que, pour tout i , $E_i \cap F$ est stable.
- b) Montrer que si u est diagonalisable alors les sous-espaces de E stables par u sont les sommes directes des sous-espaces des espaces propres.
En déduire que u est semi-simple : tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable.

Exercice 55. — Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbf{C})$ qui commutent.

- a) Montrer que les espaces propres et les espaces caractéristiques de A sont stables par B .
- b) Montrer que A et B sont trigonalisables dans une même base.
- c) On suppose que A et B sont diagonalisables. Montrer que A et B sont simultanément diagonalisables.
- d) Généraliser à une famille d'endomorphismes qui commutent.
- e) Peut-on simultanément "jordaniser" A et B ?
[**Indication:** Considérer le cas $A = J_n$ et $B = J_n^2$.]

Exercice 56. — Soient u un endomorphisme de E de dimension finie.

- a) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
- (i) Les seuls sous-espaces de E stables par u sont 0 et E .
- (ii) Le polynôme caractéristique de u est irréductible.
- b) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
- (i) Tout sous-espace de E stable par u admet un supplémentaire stable par u .
- (ii) Le polynôme minimal de u est sans facteur carré.

Exercice 57. — Décomposition de Frobenius

On reprend les notations de l'exercice 10. Soit $x \in E$ tel que $\pi_x = \pi_u$. La famille $\{e_1 := x, e_2 := u(x), \dots, e_d := u^{d-1}(x)\}$ ($d = \deg \pi_u$) est une famille libre de E ; on la complète en une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E . On note $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ la base duale.

a) Soit $F = \{e_d^* \circ u^i, i \in \mathbf{N}\}^\perp$. Montrer que F est stable par u .

b) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{K}[u] &\rightarrow E^* \\ P(u) &\mapsto e_d^* \circ P(u) \end{aligned}$$

est injective. En déduire que $\dim F = n - d$ puis que $E = E_x \oplus F$.

c) Si P est un polynôme, on note $C(P)$ la matrice compagnon associée. Déduire de ce qui précède qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est une matrice diagonale

par blocs $\begin{bmatrix} C(P_1) & & & 0 \\ & C(P_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C(P_k) \end{bmatrix}$ avec $P_k \mid P_{k-1} \mid \dots \mid P_1 = \pi_u$.

d) Si π_u est scindé, faire le lien avec la décomposition de Jordan.

e) Montrer que les polynômes P_i sont uniques : s'il existe une autre base dans laquelle la matrice de u est $\text{diag}(C(Q_1), \dots, C(Q_l))$ avec $Q_l \mid \dots \mid Q_1$, alors $l = k$ et $\forall i, Q_i = P_i$.

f) Montrer que deux endomorphismes u et v de E sont semblables ss'ils ont les mêmes invariants de similitude.

g) **Applications :**

(i) La réduction de Jordan,

(ii) Si \mathbb{L} est un surcorps de \mathbf{K} , si $A, B \in M_n(\mathbf{K})$ sont semblables sur \mathbb{L} alors elles sont semblables sur \mathbf{K} ,

(iii) $u \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique ssi les seuls endomorphismes commutant avec u sont les polynômes en u ,

(iv) Une matrice et sa transposée sont semblables dans $M_n(\mathbf{K})$.