Transformation binomiale des suites, produit harmonique et sommes harmoniques

Marc-Antoine Coppo
CNRS-INSMI (laboratoire Dieudonné)

Séminaire ATG
Séance du jeudi 15 décembre à 14h (salle I)

Résumé

Dans l'espace $\mathcal{E}^*$ des suites à valeurs complexes, on considère la transformation binomiale D qui, à une suite $a = (a(1), a(2), a(3), \cdots)$, associe la suite $D(a)$ définie par

$$D(a)(n+1) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a(k+1) \text{ pour tout } n \geq 0.$$

L'opérateur D est un automorphisme involutif du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{E}^*$, i.e. $D = D^{-1}$. Si $D(a)D(b)$ désigne la suite obtenue par produit terme à terme des suites $D(a)$ et $D(b)$, on définit le *produit harmonique* des suites a et b par la formule

$$a \bowtie b = D(D(a)D(b))\,.$$

Il en résulte (par involutivité de D) que $D(ab) = D(a) \bowtie D(b)$. Muni du produit $\bowtie$, l'espace vectoriel $\mathcal{E}^*$ est une algèbre commutative et associative, l'élément unité étant la suite $\delta_0 = (1, 0, 0, \dots)$. Une expression explicite du produit $a \bowtie b$ est donnée par la formule

$$(a \bowtie b)(n+1) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq n}} C_n^{k,l}\, a(k+1)b(l+1)$$

avec

$$(X + Y - XY)^n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq n}} C_n^{k,l}\, X^k Y^l\,.$$

Grâce à une propriété remarquable du produit $\bowtie$ vis à vis des sommes harmoniques (qui justifie qu'on l'appelle produit harmonique), on démontre notamment la relation suivante : si

$$S^{(k)}(a)(n) = \sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \dots n_{k-1}}\, a(n_k),$$

alors

$$S^{(k)}(a)(n) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^{k-1}} D(a)(m)\,.$$

La suite $S^{(k)}(a)$ est appelée la *somme harmonique* k-ième de la suite a. Les nombres $S^{(k)}(a)(n)$ apparaissent comme une généralisation naturelle des nombres harmoniques $c_n^{(k)}$ introduits en 1989 par Rota et Roman dans le cas où a est la suite harmonique $n \mapsto \frac{1}{n}$, et la relation précédente comme une extension de la formule de Dilcher. Ceci conduit à plusieurs applications intéressantes.