

Examen du 14 juin 2016

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 - (3 points) Soit n un entier > 3 .

1. Les nombres $n, n + 2, n + 4$ peuvent-ils être tous premiers ?
2. Les nombres $n, n + 2, n + 6$ peuvent-ils être tous premiers ?

Exercice 2 - (4 points) Résoudre les équations diophantiennes, c'est-à-dire trouver les couples d'entiers (x, y) vérifiant

1. $36x + 54y = 8$.
2. $306x + 657y = 9$.

Exercice 3 - (3 points) Résoudre le système suivant

$$5x \equiv 1 \pmod{6} \text{ et } 3x \equiv 1 \pmod{5}.$$

Exercice 4 - (3 points)

1. Donner la définition de la fonction d'Euler $\varphi(n)$ d'un entier $n > 0$.
2. Calculer le nombre de générateurs du groupe $(\mathbb{Z}/240\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 5 - (3 points) Déterminer l'ordre de la classe résiduelle $\bar{2}$ dans le groupe des inversibles $(\mathbb{Z}/85\mathbb{Z})^*$.

Exercice 6 - (4 points)

1. Montrer que le polynôme $X^3 + X + 1$ est irréductible dans \mathbb{F}_5 .
2. Calculer l'inverse de la classe résiduelle $\overline{X^2 + 3X + 2}$ dans $\mathbb{F}_5[X]/(X^3 + X + 1)$.