Examen du 27 mars 2017

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1. (8 points) **QCM.** Une seule réponse parmi les 5 choix possibles (A,B,C,D ou E) est correcte. Il suffit d'indiquer la lettre pour chaque question ; aucun argument/ justification/calcul n'est demandé.

Barème : réponse correcte +1 point, réponse fausse : -0,5 point.

1. Le nombre de générateurs du groupe $(\mathbb{Z}/80\mathbb{Z},+)$ est

   A : 1 B : 12 C : 32 D : 79 E : 80

2. Le nombre d'éléments d'ordre 3 dans le groupe $(\mathbb{Z}/60\mathbb{Z},+)$ est

   A : 1 B : 2 C : 3 D : 16 E : 20

3. L'ordre du groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ est

   A : 1 B : 3 C : 4 D : 12 E : ∞

4. L'ordre de la classe $\overline{3}$ dans le groupe $((\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^*,.)$ est

   A : 2 B : 4 C : 8 D : 16 E : 17

5. Soient p,q,r trois nombres premiers distincts. Le nombre de diviseurs positifs du produit pqr est

   A : 1 B : 3 C : 8 D : 16 E : ce nombre dépend de p,q,r.

6. Le reste de la division euclidienne par 11 de $10! = 10\cdot 9\cdots 3\cdot 2$ est

   A : 0 B : 1 C : 4 D : 8 E : 10

7. Soit $f:\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ un homomorphisme de groupe injectif. Alors on a nécessairement la relation suivante

   A : $\mathrm{f}(\overline{1})=\overline{6}$ B : $\mathrm{f}(\overline{0})=\overline{11}$ C : $\mathrm{f}(\overline{1})=\overline{1}$ D : $\mathrm{f}(\overline{0})=\overline{1}$ E : $\mathrm{f}(\overline{1})=\overline{0}$

8. Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie >1 et soit $A=(End(V),+,\circ)$ l'anneau des endomorphismes de V. Alors
   — A : L'anneau A est commutatif.
   — B : L'identité Id : $\mathrm{Id}(v)=v$ est le neutre du groupe $(End(V),+)$.
   — C : L'anneau A n'a pas de diviseurs de zéros.
   — D : Tous les endomorphismes surjectifs sont inversibles dans A.
   — E : Si f et g sont inversibles, alors $f+g$ est inversible.

Exercice 2. (3 points) Calculer le reste de la division euclidienne par 13 du nombre

$$6^{12^{6^{12}}}+12^{6^{12^{6}}}.$$

Exercice 3. (5 points) Résoudre les deux systèmes de congruences

1. $5x \equiv 2 \mod 6$ et $3x \equiv 1 \mod 5$.
2. $2x \equiv 1 \mod 3$ et $x \equiv 4 \mod 6$.

Exercice 4. (4 points) Déterminer si les classes résiduelles suivantes sont inversibles dans l'anneau $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$. Si oui, calculer leur inverse.

1. $\overline{12}$
2. $\overline{13}$
3. $\overline{14}$
4. $\overline{15}$