

## Examen du 23 juin 2017

Aucun document n'est autorisé.

**Exercice 1.** Trouver tous les entiers  $x \in \mathbb{Z}$  qui vérifient la congruence

$$12x \equiv 1 \pmod{343}.$$

**Exercice 2.** Soit  $I$  l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau  $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}, +, \cdot)$  et  $D$  l'ensemble des diviseurs de zéro de l'anneau  $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}, +, \cdot)$ .

1. Déterminer tous les éléments de  $I$  et de  $D$ .
2. Est-ce que  $(I, +)$  est un groupe ?
3. Est-ce que  $(I, \cdot)$  est un groupe ?
4. Est-ce que  $(D, +)$  est un groupe ?
5. Est-ce que  $(D, \cdot)$  est un groupe ?

Pour les questions (2)-(5) on demande de justifier la réponse.

**Exercice 3.** Décrire un isomorphisme entre les 2 groupes  $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$  et  $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \cdot)$  en donnant la correspondance bijective complète entre leurs éléments.

**Exercice 4.**

1. Montrer que le polynôme  $f(X) = X^4 + X + 1$  est irréductible dans  $\mathbb{F}_2[X]$ .
2. Combien d'éléments a le corps fini  $K = \mathbb{F}_2[X]/(f)$  ?
3. Calculer l'inverse de  $\bar{X}$  dans  $K^*$ .

**Exercice 5.** On considère le polynôme  $P_a = X^2 + aX + 1 \in \mathbb{R}[X]$  avec  $a \in \mathbb{R}$ .

1. Pour quelles valeurs de  $a \in \mathbb{R}$  le polynôme  $P_a$  est-il irréductible dans l'anneau des polynômes  $\mathbb{R}[X]$  ?
2. Pour quelles valeurs de  $a \in \mathbb{R}$  l'anneau quotient  $\mathbb{R}[X]/(P_a)$  est-il un corps ?
3. Pour quelles valeurs de  $a \in \mathbb{R}$  la classe  $\bar{X} \in \mathbb{R}[X]/(P_a)$  est-elle inversible ?