Examen du 12 mars 2018

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1. (8 points) **QCM.** Une seule réponse parmi les 5 choix possibles (A,B,C,D ou E) est correcte. Il suffit d'indiquer la lettre pour chaque question ; aucun argument/ justification/calcul n'est demandé.

Barème : réponse correcte +1 point, réponse fausse : -0,5 point.

1. Parmi les 5 sous-ensembles suivants de $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$ lequel n'est pas un sous-groupe ?

   A : $\{\overline{0}\}$ B : $\{\overline{4}\}$ C : $\{\overline{0}, \overline{4}\}$ D : $\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$ E : $\{\overline{0}, \overline{-2}, \overline{4}, \overline{2}\}$

2. Le nombre d'éléments d'ordre 3 dans le groupe $(\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}, +)$ est

   A : 1 B : 2 C : 3 D : 16 E : 20

3. L'ordre du groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est

   A : 1 B : 3 C : 4 D : 12 E : ∞

4. L'ordre de la classe $\overline{3}$ dans le groupe $((\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^*, .)$ est

   A : 2 B : 4 C : 8 D : 16 E : 17

5. Soient p, q, r trois nombres premiers distincts. Le nombre de diviseurs positifs du produit pqr est

   A : 1 B : 3 C : 8 D : 16 E : ce nombre dépend de p, q, r.

6. Le reste de la division euclidienne par 11 de $10! = 10 \cdot 9 \cdots 3 \cdot 2$ est

   A : 0 B : 1 C : 4 D : 8 E : 10

7. On considère l'homomorphisme de groupe $f : \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ défini par $f(\overline{x}) = \overline{10} \cdot \overline{x}$. Alors l'ordre de l'image $\mathrm{im}(f)$ est égal à

   A : 0 B : 1 C : 3 D : 10 E : 30

8. Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie > 1 et soit $A = (End(V), +, \circ)$ l'anneau des endomorphismes de V. Alors
   — A : L'anneau A est commutatif.
   — B : L'identité Id : $\mathrm{Id}(v) = v$ est le neutre du groupe $(End(V), +)$.
   — C : L'anneau A n'a pas de diviseurs de zéros.
   — D : Tous les endomorphismes surjectifs sont inversibles dans A.
   — E : Si f et g sont inversibles, alors $f + g$ est inversible.

Exercice 2. (3 points) Calculer le reste de la division euclidienne par 11 du nombre

$$5^{10^{5^{10}}} + 10^{5^{10^{5}}}.$$

Exercice 3. (5 points) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit deux entiers a_n et b_n par

$$(1+\sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2}b_n.$$

1. Calculer le nombre $a_n^2 - 2b_n^2$ en fonction de n.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice 4. (4 points) Résoudre l'équation

$$x^2 - y^2 = 18$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.