Nombres premiers, Théorème de Fermat, Théorème d'Euler, Théorème des restes chinois

Exercice 1. *Montrer que* 15 *et* 28 *sont premiers entre eux.*

Exercice 2. *Soit* $n > 3$.

1. *Les nombres* $n, n+2, n+4$ *peuvent-ils être tous premiers ?*
2. *Les nombres* $n, n+2, n+6$ *peuvent-ils être tous premiers ?*

Exercice 3.

1. *Soit* $n \geqslant 2$. *Est-ce que l'un des entiers consécutifs* $n!+2, \ldots, n!+n$ *est premier ?*
2. *En déduire qu'il est possible de trouver autant d'entiers consécutifs que l'on veut dont aucun n'est premier.*

Exercice 4. *Pour quelles valeurs de* $n \in \mathbb{N}$, *les nombres* $4^n - 1$ *sont premiers ?*

Exercice 5.

1. *Y a-t-il des nombres premiers de la forme* $n^2 - 4$ *?*
2. *Y a-t-il des nombres premiers de la forme* $n^3 - 1$ *?*

Exercice 6. *Pour* $i \in \mathbb{N}^*$, *on note* p_i *le* i*-ième nombre premier. Est-ce que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *le nombre* $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ *est toujours premier ?*

> △ (Théorème des nombres premiers, Hadamard, De la Vallée Poussin 1896) Si $\forall x > 0, \pi(x)$ désigne le nombre de nombres premiers inférieurs à x, alors on a $\pi(x) \sim x/log(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

Exercice 7. Triplets pythagoriciens
On appelle triplet pythagoricien un triplet d'entiers x, y *et* z *strictement positifs, premiers entre eux dans leur ensemble et vérifiant*

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Les conditions sur x, y *et* z *ne sont bien sûr pas restrictives dans le sens où on peut toujours se ramener à ce cas.*

1. *Soient* a *et* b *deux entiers premiers entre eux. Montrer que si* ab *est un carré, alors* a *et* b *sont nécessairement des carrés.*

2. *Soit d =pgcd(x, y). Montrer que d divise z (on pourra décomposer d en facteurs premiers). En déduire que x, y et z sont premiers entre eux 2 à 2.*
3. *Montrer que x et y sont de parité différente. On supposera dans la suite que x est pair.*
4. *Montrer que le pgcd de $z - y$ et de $z + y$ vaut 2. En utilisant que $x^2 = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y)$, montrer qu'il existe u et v dans $\mathbb{N}$ avec $u > v$, premiers entre eux tels que*

$$\begin{aligned} x &= 2uv \\ y &= u^2 - v^2 \\ z &= u^2 + v^2. \end{aligned}$$

5. *Réciproquement, montrer qu'un tel triplet est pythagoricien quels que soient u et v premiers entre eux.*

   △ Cet exercice est un cas particulier de l'équation $x^n + y^n = z^n$. Fermat énonça en 1637 que pour tout entier $n \geqslant 3$, cette équation n'a pas de solution $(x, y, z) \in (\mathbb{Z}^*)^3$. Une preuve complète a été donnée par Andrew Wiles en 1993.

Exercice 8. *Soit X l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$.*

1. *Montrer que X est non vide.*
2. *Montrer que le produit de nombres de la forme $4k + 1$ est encore de cette forme.*
3. *On suppose que X est fini et on écrit $X = \{p_1, \cdots, p_n\}$. Soit*

$$a = 4p_1p_2 \cdot \ldots \cdot p_n - 1.$$

   Montrer par l'absurde que a admet un diviseur premier de la forme $4k + 3$.
4. *Montrer que ceci est impossible et donc que X est infini.*

   △ Il existe un théorème plus général - théorème de Dirichlet - qui dit : $\forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que a et b premiers entre eux, il existe une infinité de nombres premiers de la forme $ak + b, k \in \mathbb{N}$.

Exercice 9. *Soit $A = \{4n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Un élément $a \in A$ est dit A-premier si le nombre de ses diviseurs positifs dans A est 2.*

1. *Est-ce que les éléments A-premiers sont premiers ?*
2. *Montrer que tout entier de $A \setminus \{1\}$ est soit A-premier soit un produit de A-premiers.*
3. *Ecrire 693 en produit de A-premiers.*

4. *Est-ce que la décomposition précédente des entiers de A en A-premiers est unique ?*

Exercice 10. (Petit théorème de Fermat)

1. *Soit p un nombre premier et $i \in \mathbb{N}$ compris entre 1 et $p-1$. Montrer que p divise le coefficient binomial*

$$C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!}.$$

2. *En déduire une preuve par récurrence du petit théorème de Fermat.*

△ Le petit théorème de Fermat donne une condition nécessaire pour qu'un nombre soit premier. Il existe des entiers p non premiers tels que pour tout a premier avec p, a^{p-1} soit toujours congru à 1 modulo p. Le nombre 1729 est un exemple. De tels entiers p sont appelés nombres de Carmichael.

Exercice 11. *Montrer que 13 divise $2^{70} + 3^{70}$.*

Exercice 12. *Montrer que 7 divise $2222^{5555} + 5555^{2222}$.*

Exercice 13. *Montrer que pour tout entier naturel n, $2^{3n+5} + 3^{n+1}$ est divisible par 5.*

Exercice 14. *Montrer que pour tout entier naturel n, $n^5 - n$ est divisible par 30.*

Exercice 15. *Trouver le reste de la division euclidienne de $16^{2^{1000}}$ par 7 ?*

Exercice 16. *Trouver le reste de la division euclidienne de 100^{1000} par 13 ?*

Exercice 17. *Trouver tous les entiers x vérifiant les conditions suivantes*

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \ mod\ 7 \\ x &\equiv 5 \ mod\ 11. \end{aligned}$$

Exercice 18.

1. *Trouver un entier a compris entre 1 et 12 congru à 27^{103} modulo 13.*
2. *Trouver un entier b compris entre 1 et 10 congru à 27^{103} modulo 11.*
3. *Quel est le reste de la division euclidienne de 27^{103} par 143 ?*

Exercice 19. *Dix-sept pirates s'emparent d'un lot de pièces d'or toutes identiques dans un coffre ne pouvant pas en contenir plus de 1500. Leur loi exige un partage à égalité : chacun doit recevoir le même nombre de pièces d'or et, s'il y a un reste, celui-ci est attribué au cuisinier de bord. Dans le cas présent, la part du cuisinier serait de trois pièces, mais les pirates se querellent et six d'entre eux sont tués, ce qui porte la part du cuisinier à quatre pièces. Au cours d'une terrible tempête, le bateau fait naufrage et ne survivent que six pirates et le cuisinier. Par bonheur, le butin est sauvé. La part du cuisinier est maintenant de cinq pièces. Que peut espérer gagner le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste de l'équipage ?*

Exercice 20.

1. *Décomposer* 187 *en facteurs premiers.*
2. *Combien y a-t-il d'entiers compris entre* 1 *et* 187 *qui sont premiers avec* 187 *?*
3. *Quels sont les* 3 *plus petits entiers strictement postiifs qui ne sont pas premiers avec* 187 *?*
4. *Calculer* 20^{322} *modulo* 187.

Exercice 21. *Résoudre le système suivant :*

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \ mod\ 12 \\ x &\equiv 6 \ mod\ 10 \\ x &\equiv 11 \ mod\ 45. \end{aligned}$$

Exercice 22. *Résoudre le système suivant :*

$$\begin{aligned} 5x &\equiv 2 \ mod\ 6 \\ 3x &\equiv 1 \ mod\ 5 \\ 4x &\equiv 3 \ mod\ 7. \end{aligned}$$

Exercice 23. *Quels sont les deux derniers chiffres de* 2006^{2006} *?*

Exercice 24. *Déterminer les deux derniers chiffres de* $39^{39^{39}}$ *?*

Exercice 25. *Soient* p *et* q *deux nombres premiers distincts. Donnés leur produit* $n = pq$ *et* $\varphi(n)$*. Déterminer* p *et* q*.*

Exercice 26. *Est-ce que* 500 *peut s'écrire comme la somme de deux entiers tels que le premier soit divisible par* 7 *et l'autre par* 11 *?*

Exercice 27. *(Nombres de Mersenne) Soit* $a \geqslant 2$ *et* $n \geqslant 2$*. Si* $a^n - 1$ *est premier, montrer que* $a = 2$ *et que* n *est premier.*

> △ Les nombres de la forme $2^p - 1$ avec p premier, sont appelés des nombres de Mersenne. Pas tous les nombres de Mersenne sont premiers, par exemple $2^{11} - 1 = 23 \times 49$ n'est pas premier. Le test de Lucas donne un critère pour tester la primalité des nombres de Mersenne.

Exercice 28. *Soit* $a \geqslant 2$ *et* $n \geqslant 2$*. Si* $a^n + 1$ *est premier, montrer que* a *est pair et que* n *est une puissance de* 2*.*

Exercice 29. *Soit* $F_k = 2^{2^k} + 1$ *le* k *ième nombre de Fermat. Montrer que deux nombres distincts de Fermat sont premiers entre eux. En déduire qu'il y a un nombre infini de nombres premiers.*