Chap. 7

Déterminant

Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$.

Prop : Il existe à un scalaire multiplicatif près une unique forme multilinéaire alternée sur V d'ordre $n = \dim V$.

De manière explicite, si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de V et si pour $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \quad ; \quad a_{ij} \in K$$

alors pour Φ une forme multilinéaire alternée d'ordre n, on a.

$$(*) \quad \Phi(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j} \right) \Phi(e_1, e_2, \ldots, e_n).$$

Preuve : On note App_n l'ensemble de toutes les applications. $\sigma : E_n \to E_n$, pas nécessairement bijectives.

Alors $|App_n| = n^n$ et $S_n \subset App_n$. Alors on peut écrire pour Φ multilinéaire alternée

$$\Phi(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \Phi\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1} e_i, \sum_{i=1}^{n} a_{i2} e_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{in} e_i\right)$$

$$= \sum_{\sigma \in App_n} a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}\, \Phi(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$$

Si σ n'est pas injectif, alors $\exists \alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}$ $\alpha \neq \beta$
tel que $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$
donc $\Phi(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = 0$.
car Φ alternée et 2 vecteurs égaux.

Donc seuls les σ injectif (donc bijectif) donne des termes non nuls.

$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \Phi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

$$= \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j} \right) \Phi(e_1, \dots, e_n).$$

Inversement, montrons que l'application définie par (*) est une forme multilinéaire alternée non-nulle.
Il est clair que (*) est multilinéaire. Vérifions donc que Φ est alternée. ~~Soit $\alpha, \beta \in \dots$ $\alpha \neq \beta$ et~~ ~~$\tau = (\alpha\beta) \in S_n$. Alors~~ Afin de simplifier les calculs, on a seulement montrer que.

~~$\Phi(v_1, \dots, v_\beta, \dots, v_\alpha, \dots, v_n)$~~
~~échange~~

$$\Phi(v_2, v_1, v_3, \dots, v_n) = -\Phi(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$$

or $\Phi(v_2, v_1, v_3, \dots, v_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a'_{\sigma(j)j} \right) \Phi(e_1, \dots, e_n).$

avec $a'_{i1} = a_{i2}$
$a'_{i2} = a_{i1}$
$a'_{ij} = a_{ij}$ pour $j \geq 3$

Donc $\prod_{j=1}^{n} a'_{\sigma(j)j} = \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma\circ\tau(j)j}$ où $\tau = (12) \in S_n$

$$= \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma \circ \tau(j) j} \right) \Phi(e_1, \dots, e_n)$$

$$= \underset{-1}{\varepsilon(\tau)} \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma \circ \tau) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma \circ \tau(j) j} \right) \Phi(e_1, \dots, e_n)$$

on pose $\sigma' = \sigma \circ \tau$

$$= - \left(\sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma') \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma'(j) j} \right) \Phi(e_1, \dots, e_n).$$

Donc $(*)$ définit une forme multilinéaire alternée, qui est déterminée par $\Phi(e_1, \dots, e_n)$. $\square$.

Déf : Si $V = K^n$, alors Φ tel que $\Phi(e_1, \dots, e_n) = 1$ pour $\{e_1, \dots, e_n\}$ base canonique de K^n, est appelé le **déterminant**, noté det.

$$\det : \underbrace{K^n \times \dots \times K^n}_{n \text{ fois}} \longrightarrow K.$$

$$(v_1, \dots, v_n) \longmapsto \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j) j}.$$

$$\text{avec} \quad v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

Notation matricielle : Soit $A = \mathrm{Mat}_{\{e_1, \dots, e_n\}} \{v_1, \dots, v_n\}$, c'est-à-dire

$A = (a_{ij})_{ij}$ coeff i-ème ligne, j-ème colonne $= a_{ij}$

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$: $\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j) j}}$

Exemples

$\boxed{n=2}$ $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $S_2=\{Id,(12)\}$.

$$\det(A) = \underbrace{a_{11}\,a_{22}}_{Id} + \varepsilon(12)\, a_{(12)(1)\,1} + a_{(12)2\,2}$$

$$= a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{22}.$$

$\boxed{n=3}$ $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$S_3=\{Id,(12),(13),(23),(123),(132)\}$

$\varepsilon = +1,\ -1,\ -1,\ -1,\ +1,\ +1$

~~det(A) =~~

$$\det(A) = \overbrace{a_{11}\,a_{22}\,a_{33}}^{Id} + \overbrace{a_{21}\,a_{32}\,a_{13}}^{(123)} + \overbrace{a_{31}\,a_{12}\,a_{23}}^{(132)}$$

$$- \underbrace{a_{31}\,a_{22}\,a_{13}}_{(13)} - \underbrace{a_{11}\,a_{32}\,a_{23}}_{(23)} - \underbrace{a_{21}\,a_{12}\,a_{33}}_{(12)}$$

Prop. : Soit $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. On note ${}^tA$ = transposée de A.
Alors :

$$\boxed{\det({}^tA) = \det(A)}$$

Preuve : ${}^tA$ est la matrice $({}^ta_{ij})$ avec ${}^ta_{ij} = a_{ji}$

Donc
$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} {}^ta_{\sigma(j)j}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j\sigma(j)}$$

or on peut écrire.
$$a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}$$
(car σ est un bijection. Il suffit de permuter les facteurs.).

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(j)j}.$$

or $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$ et $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est une bijection de S_n.

$$= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(j)j}$$

$$= \det(A).$$

$\square$

Prop : (Développement par rapport à une ligne/colonne) Soit $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$.
Soient $i,j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. On note $A_{ij} \in \mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{K})$ la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue à partir de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne.

a) Développement suivant la ligne i

$$\boxed{\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{ij})}$$

b) Développement suivant la colonne j :

$$\boxed{\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{ij})}$$

Preuve : a). On introduit pour $i,j \in \{1,\dots,n\}$ le sous-ensemble de S_n.

$$S_{n,i,j} := \{ \sigma \in S_n \mid \sigma(j) = i \}.$$

Attention : $S_{n,i,j}$ n'est pas un sous-groupe de S_n (sauf si $i=j$)

En choisissant des bijections entre E_{n-1} et $E_n \setminus \{i\}$ resp. $E_n \setminus \{j\}$ on voit que $S_{n,i,j}$ est en bijection avec S_{n-1}.

On a la réunion disjointe

$$S_n = \coprod_{j=1}^{n} S_{n,i,j}.$$

En utilisant cette réunion disjointe, on peut écrire.

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)k}.$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_{n,i,j}} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{ij} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

(supprimé)

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{\sigma \in S_{n,i,j}} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots \widehat{a_{ij}} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

On définit maintenant une bijection entre

$$S_n \supset S_{n-1} \longrightarrow S_{n,i,j}$$

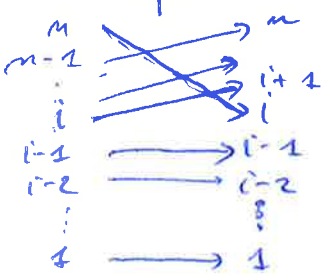
$$\tilde{\sigma} \longmapsto \alpha^{-1} \circ \tilde{\sigma} \circ \beta = \sigma$$

$$\tilde{\sigma} = \alpha \circ \sigma \circ \beta^{-1} \longleftarrow \sigma$$

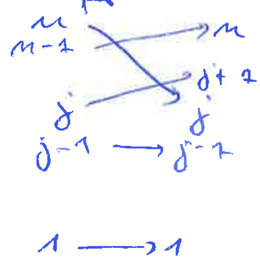
$$\begin{tikzcd} E_n \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\tilde{\sigma}"'] & E_n \arrow[d, "\sigma"] \\ E_n \arrow[r, "\beta"] & E_n \end{tikzcd}$$

où α est défini par $\begin{cases} \alpha(n) = j \\ \alpha(x) = x \quad \text{pour } x < j \\ \alpha(x) = x+1 \quad \text{pour } x \geq j \end{cases}$

β



α



et β est défini par $\begin{cases} \beta(n) = i \\ \beta(x) = x \quad \text{pour } x < i \\ \beta(x) = x+1 \quad \text{pour } x \geq i \end{cases}$

Alors il est clair que

si $\sigma(j) = i \iff \tilde{\sigma}(n) = n$.

On identifie S_{n-1} au sous-groupe de S_n

$$S_{n-1} = \{ \tilde{\sigma} \in S_n \mid \tilde{\sigma}(n) = n \}.$$

Ainsi, comme ε est un homomorphisme, on obtient.

$$\varepsilon(\tilde{\sigma}) = \varepsilon(\alpha) \cdot \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\beta^{-1})$$

$$= \varepsilon(\alpha) \cdot \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\beta).$$

Pour calculer $\varepsilon(\alpha)$ on va compter le nombre d'inversions de pairs $\{u, v\}$. ; $u, v \in E_n$.

Or $\{u,v\}$ est une inversion pour α (supposons $u < v$).

ssi $j < u < n$ et $v = n$

Donc $\varepsilon(\alpha) = (-1)^{n-j}$

De même $\varepsilon(\beta) = (-1)^{n-i}$

Donc $\varepsilon(\tilde{\sigma}) = \varepsilon(\sigma)(-1)^{2n-i-j} = \varepsilon(\sigma) \cdot (-1)^{i+j}$

En rassemblant ces égalités, on obtient donc.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{\tilde{\sigma} \in S_{n-1}} \varepsilon(\tilde{\sigma}) \cdot (-1)^{i+j} a_{\sigma(1)1} \cdot \widehat{a_{ij}} \cdot a_{\sigma(n)n}.$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

---

b). On remarque que développer A suivant la colonne j est équivalent à développer ${}^tA$ (= transposée de A) suivant la ligne i.

Donc $\det(A) = \det({}^tA) = \sum_{i=1}^{n} {}^ta_{ji} (-1)^{i+j} \det(({}^tA)_{ji})$

De plus, il est clair que $({}^tA)_{ji} = {}^t(A_{ij})$

et par définition ${}^ta_{ji} = a_{ij}$

donc on obtient.

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det({}^t(A_{ij}))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

Prop. : Soient $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de V et soit $\{v_1, \dots, v_n\}$ une famille de vecteurs quelconque.

On note $A = \mathrm{Mat}_{\{e_1,\dots,e_n\}}\{v_1, \dots, v_n\}$. Alors on a l'équivalence.

$$\boxed{\det(A) \neq 0 \iff \{v_1, \dots, v_n\} \text{ est une base.}}$$

Preuve : • Supposons que $\{v_1, \dots, v_n\}$ n'est pas une base, alors il existe une relation $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$, avec au moins un indice i tel que $\lambda_i \neq 0$. On peut donc écrire $v_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right) v_j$ (*)

Si Φ est une forme multilinéaire alternée avec $\Phi(e_1, \dots, e_n) \neq 0$, on a $\Phi(v_1, \dots, v_n) = 0$ si on remplace v_i par (*) et si on développe par multilinéarité en la variable i (le vecteur v_j ($j \neq i$) apparait 2 fois, donc $\Phi(\dots v_j, \dots v_j, \dots) = 0$).

donc $0 = \Phi(v_1, \dots, v_n) = \det(A)\, \underbrace{\Phi(e_1, \dots, e_n)}_{\neq 0}$.

$\Rightarrow \det(A) = 0$.

- Supposons que $\{v_1, \dots v_n\}$ est une base.

  Alors $A^{-1} = \underset{\{v_1,\dots,v_n\}}{Mat} \{e_1, \dots e_n\}$.

  Donc on peut écrire. $\Phi(e_1, \dots e_n) = \det(A^{-1}) \cdot \Phi(v_1, \dots v_n)$.

  en échangeant les rôles de $\{v_1, \dots v_n\}$ et $\{e_1, \dots, e_n\}$.

  Comme $\Phi(e_1, \dots, e_n) \neq 0$, on obtient $\det(A^{-1}) \neq 0$

  et $\Phi(v_1, \dots, v_n) \neq 0$ et aussi $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

  donc $\underline{\det(A) \neq 0}$.

Prop. : Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Alors

$$\boxed{\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)}$$

Preuve : Observons que la formule de la 1ère proposition.

(1) $\Phi(v_1, \dots, v_n) = \det(B)\, \Phi(e_1, \dots, e_n)$, où $v_i = Be_i$

~~pou~~ est vraie pour toute famille $\{e_1, \dots, e_n\}$, pas ~~[illegible]~~ seulement pour des bases.

posons $w_i = Av_i$ alors.

(2) $\Phi(w_1, \dots, w_n) = \det(A) \cdot \Phi(v_1, \dots, v_n)$

En combinant (1) et (2) on obtient.

$$\Phi(w_1, \dots, w_n) = \det(A) \cdot \det(B)\, \Phi(e_1, \dots, e_n).$$

or $w_i = Av_i = A \cdot B e_i = (AB) e_i$

donc on a aussi

$$\Phi(w_1, \dots, w_n) = \det(AB)\, \Phi(e_1, \dots, e_n).$$

Comme $\Phi(e_1, \dots, e_n) \neq 0$, on obtient donc après simplification.

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$