Prop : La forme hermitienne $h : V\times V \to \mathbb{C}$ est déterminée par sa forme quadratique $q_h : V \to \mathbb{R}$ associée via la formule de polarisation.

$$\boxed{h(u,v) = \frac{1}{4}\left[q_h(u+v) - q_h(u-v) + i q_h(u-iv) - i q_h(u+iv)\right]}$$

Preuve : Il suffit de développer l'expression de droite à partir de la formule. $h(v,v) = q_h(v)$.

$$(+)\left\{\begin{aligned}
q_h(u+v) &= h(u+v,u+v) = h(u,u) + h(u,v) + h(v,u) + h(v,v).\\
-q_h(u-v) &= -h(u-v,u-v) = -h(u,u) + h(u,v) + h(v,u) - h(v,v)\\
i q_h(u-iv) &= i h(u-iv,u-iv) = i h(u,u) + h(u,v) - h(v,u) + i h(v,v).\\
-i q_h(u+iv) &= -i h(u+iv,u+iv) = -i h(u,u) + h(u,v) - h(v,u) - i h(v,v)
\end{aligned}\right.$$

$$\sum \quad = 4h(u,v). \qquad \square.$$

Représentation matricielle d'une forme hermitienne.

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $(=n)$ muni d'une base $\{e_1, \dots, e_n\}$. Soit $h : V\times V \to \mathbb{C}$ une forme hermitienne. Alors pour $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $v = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, on peut écrire.

$$h(u,v) = h\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1} y_j e_j\right) = \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{n} \bar{x}_i y_j \, h(e_i, e_j)$$

On introduit la matrice carrée d'ordre n
$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ défini par $a_{ij} = h(e_i, e_j) \in \mathbb{C}$

A est appelé la matrice associée à h dans la base $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Def: Une matrice $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ est appelée **hermitienne** si $\boxed{{}^tM = \overline{M}}$ c'est-à-dire $m_{ji} = \overline{m_{ij}}$

Rem: Il est clair que la matrice A associée à une forme hermitienne h est hermitienne.

Inversement, étant donné une matrice A hermitienne, on peut lui associer une forme hermitienne définie par $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$h(X, Y) = {}^t\overline{X} A Y$, où X et Y sont deux vecteurs colonnes.

Def: Le **rang** d'une forme hermitienne h est le rang de sa matrice associée.

Thm. (Réduction de Gauss)
Soit $h : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ une forme hermitienne et soit q_h sa forme quadratique associée. Si h est de rang r, alors il existe r formes linéaires indépendantes $l_1, \dots, l_r$
$l_i : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ des nombres réels non-nuls

tels que

$\forall v \in \mathbb{C}^n, q_h(v) = \underline{\alpha_1} \overline{l_1(v)} l_1(v) + \alpha_2 \overline{l_2(v)} l_2(v) + \dots + \alpha_r \overline{l_r(v)} l_r(v)$.

$\forall u, v \in \mathbb{C}^n, h(u, v) = \alpha_1 \overline{l_1(u)} l_1(v) + \alpha_2 \overline{l_2(u)} l_2(v) + \dots + \alpha_r \overline{l_r(u)} l_r(v)$

Dém. : C'est, à quelques modifications près, la même démonstration que pour les formes quadratiques.
Voici les modifications à faire :

la forme générale d'une forme quadratique q_a est

$$\forall v \in \mathbb{C}^n \qquad q_a(v) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,\bar{x}_i x_i + \sum_{\substack{1\le i,j\le n \\ i<j}} \left(a_{ij}\,\bar{x}_i x_j + \bar{a}_{ij}\,\bar{x}_j x_i\right)$$

$v = (x_1, \dots, x_n)$

avec $a_{ii} \in \mathbb{R}$

$a_{ij} \in \mathbb{C}$ $\quad i<j$

1^{er} cas $a_{11} \neq 0$. $\qquad a = a_{11} \in \mathbb{R}$

on écrit.

$$q(v) = a\,\bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_1 B(x_2,\dots,x_n) + x_1 \bar{B}(x_2,\dots,x_n) + C(x_2,\dots,x_n)$$

$$= a\left(\bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_1 \frac{B}{a} + x_1 \frac{\bar{B}}{a} + \frac{B\bar{B}}{a^2}\right) + C - \frac{B\bar{B}}{a}$$

$$= a\left(\bar{x}_1 + \frac{\bar{B}}{a}\right)\left(x_1 + \frac{B}{a}\right) + C - \frac{B\bar{B}}{a}$$

$$= a\left(\bar{x}_1 + \frac{\bar{B}}{a}\right)\left(x_1 + \frac{B}{a}\right) + C - \frac{B\cdot\bar{B}}{a}$$

$2^{ème}$ cas $a_{ii} = 0 \ \forall i$ $\qquad a = a_{12} \in \mathbb{C}$.

on écrit.

$$q(v) = a\,\bar{x}_1 x_2 + \bar{a}\,\bar{x}_2 x_1 + x_1 \bar{B}(x_3,\dots,x_n) + x_2 \bar{C}(x_3,\dots,x_n)$$
$$+ \bar{x}_1 B(x_3,\dots,x_n) + \bar{x}_2 C(x_3,\dots,x_n) + D(x_3,\dots,x_n).$$

$$= a\underbrace{\left(\bar{x}_1 + \frac{\bar{C}}{a}\right)}_{\bar{v}}\underbrace{\left(x_2 + \frac{B}{a}\right)}_{u} + \underbrace{\bar{a}\left(\bar{x}_2 + \frac{\bar{B}}{\bar{a}}\right)}_{\bar{u}}\underbrace{\left(x_1 + \frac{C}{\bar{a}}\right)}_{v} - \frac{B\bar{C}}{a} - \frac{\bar{B}C}{\bar{a}} + D.$$

puis on utilise la formule

$$u\bar{v} + \bar{u}v = \frac{1}{2}\left[(u+v)\overline{(u+v)} - (u-v)\overline{(u-v)}\right].$$

avec $u = a\left(x_2 + \frac{B}{a}\right)$ $\qquad v = x_1 + \frac{C}{\bar{a}}$

Thm (Inertie de Sylvester)

Soit $h : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ une forme hermitienne de rang r. On note r_+ le nombre de $\alpha_i > 0$ et r_- le nombre de $\alpha_i < 0$ (voir réduction de Gauss).

Alors le couple (r_+, r_-) ne dépend pas de la décomposition choisie et est appelé **la signature** de h.

Exemple : $h : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$.

$$q_h(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_1 + 2i\bar{x}_1 x_2 - 2i\bar{x}_2 x_1 + \bar{x}_2 x_3 + x_2 \bar{x}_3$$

$$= (\bar{x}_1 - 2i\bar{x}_2)(x_1 + 2ix_2) - 4\bar{x}_2 x_2 + \bar{x}_2 x_3 + x_2 \bar{x}_3$$

$$= (\bar{x}_1 - 2i\bar{x}_2)(x_1 + 2ix_2) - 4\left(\bar{x}_2 x_2 - \frac{1}{4}\bar{x}_2 x_3 - \frac{1}{4} x_2 \bar{x}_3\right)$$

$$= (\bar{x}_1 - 2i\bar{x}_2)(x_1 + 2ix_2) - 4\left(\bar{x}_2 - \frac{1}{4}\bar{x}_3\right)\left(x_2 - \frac{1}{4}x_3\right) + \frac{1}{4}\bar{x}_3 x_3$$

$\ell_1 = x_1 + 2ix_2$ $\quad \alpha_1 = 1$

$\ell_2 = x_2 - \frac{1}{4}x_3$ $\quad \alpha_2 = -4$ $\qquad$ signature $= (2, 1)$.

$\ell_3 = x_3$ $\quad \alpha_3 = \frac{1}{4}$