

Théorème d'Euler/Fermat, Théorème des restes chinois

Exercice 1. (Petit théorème de Fermat)

1. *Soit p un nombre premier et $i \in \mathbb{N}$ compris entre 1 et $p-1$. Montrer que p divise le coefficient binomial*
$$C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!}.$$
2. *En déduire une preuve par récurrence du petit théorème de Fermat.*

Exercice 2. *Montrer que* 13 *divise* $2^{70} + 3^{70}$.

Exercice 3. *Montrer que* 7 *divise* $2222^{5555} + 5555^{2222}$.

Exercice 4. *Montrer que pour tout entier naturel n,* $2^{3n+5} + 3^{n+1}$ *est divisible par* 5.

Exercice 5. *Montrer que pour tout entier naturel n, $n^5 - n$ est divisible par* 30.

Exercice 6. *Trouver le reste de la division euclidienne de* $16^{2^{1000}}$ *par* 7 *?*

Exercice 7. *Trouver le reste de la division euclidienne de* 100^{1000} *par* 13 *?*

Exercice 8. *Trouver tous les entiers x vérifiant les conditions suivantes*
$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \; mod\, 7 \\ x &\equiv 5 \; mod\, 11. \end{aligned}$$

Exercice 9.

1. *Trouver un entier a compris entre* 1 *et* 12 *congru à* 27^{103} *modulo* 13.
2. *Trouver un entier b compris entre* 1 *et* 10 *congru à* 27^{103} *modulo* 11.
3. *Quel est le reste de la division euclidienne de* 27^{103} *par 143 ?*

Exercice 10. *Dix-sept pirates s'emparent d'un lot de pièces d'or toutes identiques dans un coffre ne pouvant pas en contenir plus de* 1500*. Leur loi exige un partage à égalité : chacun doit recevoir le même nombre de pièces d'or et, s'il y a un reste, celui-ci est attribué au cuisinier de bord. Dans le cas présent, la part du cuisinier serait de trois pièces, mais les pirates se querellent et six d'entre eux sont tués, ce qui porte la part du cuisinier à quatre pièces. Au cours d'une terrible tempête, le bateau fait naufrage et ne survivent que six pirates et le cuisinier. Par bonheur, le butin est sauvé. La part du cuisinier est maintenant de cinq pièces. Que peut espérer gagner le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste de l'équipage ?*

Exercice 11.

1. *Décomposer* 187 *en facteurs premiers.*
2. *Combien y a-t-il d'entiers compris entre* 1 *et* 187 *qui sont premiers avec* 187 *?*
3. *Quels sont les* 3 *plus petits entiers strictement postiifs qui ne sont pas premiers avec* 187 *?*
4. *Calculer* 20^{322} *modulo* 187.

Exercice 12. *Résoudre le système suivant :*

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \; mod \; 12 \\ x &\equiv 6 \; mod \; 10 \\ x &\equiv 11 \; mod \; 45. \end{aligned}$$

Exercice 13. *Résoudre le système suivant :*

$$\begin{aligned} 5x &\equiv 2 \; mod \; 6 \\ 3x &\equiv 1 \; mod \; 5 \\ 4x &\equiv 3 \; mod \; 7. \end{aligned}$$

Exercice 14. *Quels sont les deux derniers chiffres de* 2006^{2006} *?*

Exercice 15. *Déterminer les deux derniers chiffres de* $39^{39^{39}}$ *?*

Exercice 16. *Soient* p *et* q *deux nombres premiers distincts. Comment peut-on trouver* p *et* q *connaissant leur produit* $n = pq$ *et le nombre* $\varphi(n)$ *?*

Exercice 17. *Est-ce que* 500 *peut s'écrire comme la somme de deux entiers tels que le premier soit divisible par* 7 *et l'autre par* 11 *?*

Exercice 18. *(Nombres de Mersenne) Soit* $a \geqslant 2$ *et* $n \geqslant 2$. *Si* $a^n - 1$ *est premier, montrer que* $a = 2$ *et que* n *est premier.*

Exercice 19. *Soit* $a \geqslant 2$ *et* $n \geqslant 2$. *Si* $a^n + 1$ *est premier, montrer que* a *est pair et que* n *est une puissance de* 2.

Exercice 20. *Soit* $F_k = 2^{2^k} + 1$ *le* k*-ième nombre de Fermat. Montrer que deux nombres distincts de Fermat sont premiers entre eux. En déduire qu'il y a un nombre infini de nombres premiers.*

Exercice 21. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *non divisible par* 2 *et* 5. *Prouver qu'il existe un multiple de* n *dont l'écriture décimale ne comporte que le chiffre* 1.
Indication : utiliser le théorème d'Euler avec 10 *modulo* $9n$.