Déterminants

Exercice 1. *Calculer les déterminants suivants*

$$\begin{vmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 2. *Sans développer le déterminant, montrer que pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$ on a l'égalité*

$$\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1 + a + b + c.$$

Exercice 3. *Soit Δ_n le déterminant de taille n suivant :*

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

1. *Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a la relation $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$.*
2. *En déduire la valeur de Δ_n pour tout $n \geqslant 1$.*

Exercice 4. Déterminant de Vandermonde. *Soit $n \geqslant 2$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ n nombres complexes distincts. On se propose de calculer le déterminant de taille n suivant :*

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. *Calculer les déterminants $V(\alpha_1, \alpha_2)$ pour $n = 2$ et $V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ pour $n = 3$. On donnera ces déterminants comme expressions polynomiales factorisées en les α_i.*

2. *Démontrer que* $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, x)$ *est une fonction polynômiale de* x *dont on précisera le degré.*

3. *En déduire que*

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, x) = V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x - \alpha_i).$$

4. *En déduire l'expression générale de* $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Exercice 5. *Soient* $n \geqslant 2$ *et* $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathbb{C}$. *Calculer le déterminant de taille* n *suivant :*

$$\begin{vmatrix} s_1 & \cdots & \cdots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \cdots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 6. *Soit* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ *une matrice carrée d'ordre* n. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *On note* $A(x)$ *la matrice dont le terme général est* $a_{ij} + x$. *En particulier on a* $A(0) = A$.

1. *Montrer que la fonction* $f : x \mapsto f(x) = \det(A(x))$ *est une fonction polynômiale de* x *de degré inférieur ou égal à* 1.

2. *Pour* $a, b \in \mathbb{R}$ *deux réels distincts et* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, *déduire la valeur du déterminant suivant :*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & a & \cdots & a \\ b & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & \alpha_n \end{vmatrix}.$$

Indication : utiliser (1) en calculant les valeurs $f(-a)$ *et* $f(-b)$. *En déduire* $f(0)$.