Formes quadratiques

Exercice 1. *On se donne dans $\mathbb{R}^3$ les familles suivantes de formes linéaires. Déterminer dans chaque cas si ces familles sont linéairement indépendantes.*

1. $l_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2$, $l_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3$, $l_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3$.
2. $l_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$, $l_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 + 2x_3$, $l_3(x_1, x_2, x_3) = 7x_3$.
3. $l_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_3$, $l_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2$, $l_3(x_1, x_2, x_3) = x_2 - 2x_3$.

Exercice 2. *Donner les matrices associées aux formes quadratiques suivantes. Les décomposer en sommes de carrés de formes linéaires en utilisant la méthode de Gauss. En déduire leur signature.*

1. $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $q(x, y, z) = xy + 2xz + 5yz$,
2. $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z(x \cos \alpha + y \cos \beta)$,
3. $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $q(x, y, z, t) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + t^2 + 2xy + xt + yt$.

Exercice 3. *Soit φ l'application*

$$\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to R, \quad (A, B) \mapsto tr({}^tAB),$$

où tr désigne la trace d'une matrice carrée d'ordre 2, c'est-à-dire $tr(A) = a_{11} + a_{22}$ avec $A = (a_{ij})$.

1. *Vérifier que φ est une application bilinéaire symétrique.*
2. *Donner la matrice associée à φ dans la base canonique E_{ij} de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, où $E_{ij} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient sur la i-ème ligne et j-ème colonne, qui vaut 1.*
3. *En déduire le rang et la signature de la forme quadratique associée à φ.*

Exercice 4. *Discuter suivant la valeur du nombre réel a le rang et la signature de la forme quadratique q_a définie par*

$$q_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad q_a(x, y, z) = x^2 + (1 + a)y^2 + (1 + a + a^2)z^2 + 2xy - 2ayz.$$

Exercice 5. *Soient a et b des réels et $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire définie par*

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + 4x_1y_2 + bx_2y_1 + ax_2y_2.$$

1. *Pour quelles valeurs de b la forme bilinéaire φ est-elle symétrique ?*
2. *Déterminer la signature de la forme quadratique q associée à φ en fonction de a.*

Exercice 6. *Soit $n \geqslant 1$. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes en la variable X de degré inférieur au égal à n et soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels distincts. On considère l'application*

$$q : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R},\ q(P) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)^2.$$

1. *Montrer que q est une forme quadratique et donner sa forme bilinéaire associée.*
2. *Montrer que q est définie positive.*

Exercice 7. *On munit $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. Réduire en base orthonormée les formes quadratiques suivantes :*

1. $q(x_1, x_2) = x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2$
2. $q(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 + 9x_2^2$
3. $q(x_1, x_2, x_3) = 41x_1^2 - 25x_2^2 + 34x_3^2 - 24x_1x_3$

Exercice 8. *Soit E l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on définit l'application*

$$\forall f \in E \quad q(f) = \lambda \mathrm{tr}(f^2) + \mu \det(f).$$

1. *Vérifier que q est une forme quadratique sur E en l'exprimant en fonction des coefficients de la matrice représentant f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.*
2. *Déterminer en fonction de λ et μ le rang et la signature de q. Analyser en particulier les cas $(\lambda, \mu) = (1, 0)$ et $(\lambda, \mu) = (0, 1)$.*

Exercice 9. *Soient M_1 et M_2 deux matrices symétriques réelles avec M_1 définie positive. D'après le cours il existe une matrice inversible S tel que*

$${}^tSM_1S = \mathrm{Id} \qquad et \qquad {}^tSM_2S = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Montrer que les coefficients diagonaux λ_i sont les racines du polynôme $P(t) = \det(M_2 - tM_1)$ et que la i-ème colonne de S, notée S_i, vérifie $S_i \in \ker(M_2 - \lambda_i M_1)$ et ${}^tS_iM_1S_i = 1$.

Exercice 10. *En utilisant l'exercice 9, diagonaliser simultanément les deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^2$*

$$q_1(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 6x_2^2, \qquad q_2(x_1, x_2) = -2x_1^2 + x_2^2 - 10x_1x_2,$$

c'est-à-dire trouver deux formes linéaires l_1, l_2 sur $\mathbb{R}^2$ et des coefficients réels α_{ij} tel que

$$q_1 = \alpha_{11}l_1^2 + \alpha_{12}l_2^2, \qquad q_2 = \alpha_{21}l_1^2 + \alpha_{22}l_2^2.$$

Exercice 11. *En utilisant l'exercice 9, diagonaliser simultanément les deux formes quadratiques sur* $\mathbb{R}^2$

$$q_1(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2, \qquad q_2(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 11x_2^2 + 14x_1x_2,$$

c'est-à-dire trouver deux formes linéaires l_1, l_2 *sur* $\mathbb{R}^2$ *et des coefficients réels* α_{ij} *tel que*

$$q_1 = \alpha_{11}l_1^2 + \alpha_{12}l_2^2, \qquad q_2 = \alpha_{21}l_1^2 + \alpha_{22}l_2^2.$$