Corrigé de l'examen du 6 mai 2019

1 QCM

1. C
2. D
3. B
4. C
5. C
6. D
7. C
8. E
9. D
10. D

2 1.) Il suffit de vérifier que f n'a pas de racines dans $\mathbb{F}_2$ (c'est-à-dire $f(\bar{0}) = \bar{1} \neq \bar{0}$ et $f(\bar{1}) = \bar{1} \neq \bar{0}$) et que f n'est pas le produit de deux polynômes irréductibles de degré 2. Or, le seul polynôme irréductible de degré 2 dans $\mathbb{F}_2[X]$ est X^2+X+1 et

$$X^4+X+1 \neq X^4+X^2+1 = (X^2+X+1)^2$$

2.) $$\left| \mathbb{F}_2[X]/_{(f)} \right| = 2^{\deg(f)} = 2^4 = 16$$

3.) Comme $\bar{X}^4 + \bar{X} + 1 = 0$ dans K, on obtient $\bar{X}(\bar{X}^3+1) = 1$, donc l'inverse de $\bar{X}$ est $\bar{X}^3 + 1$.
Sinon, on peut faire aussi une division euclidienne de X^4+X+1 par X.

3 1.) Comme P_a est de degré 2, P_a est irréductible ssi P_a n'a pas de racines réelles ssi $\Delta = a^2-4<0$ ssi $a \in \,]-2,2[$.

2.) idem que 1.) $a \in \,]-2,2[$.

3.) Dans $\mathbb{R}[X]/_{(P_a)}$ on a la relation $\bar{X}^2 + a\bar{X} + 1 = 0$

$\iff \bar{X}(\bar{X}+a) = -1$

$\iff \bar{X}(-\bar{X}-a) = 1$.

Donc $\bar{X}$ est inversible $\forall a \in \mathbb{R}$.