Corrigé de l'examen partiel du 19/10/2016

Ex1 . Solution de l'équation homogène :

$$y(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x} \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

. Solution particulière de l'équation non-homogène.

$$y_0(x) = \frac{1}{2} + C\cos(2x) + D\sin(2x)$$

$$y_0'(x) = -2C\sin(2x) + 2D\cos(2x)$$

$$y_0''(x) = -4C\cos(2x) - 4D\sin(2x)$$

$$\Rightarrow y_0'' + 2y_0' + y_0 = (4D - 3C)\cos(2x) + (-4C - 3D)\sin(2x)$$

d'où le système $\begin{cases} 4D - 3C = \frac{1}{2} \\ -4C - 3D = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C = -\frac{3}{4}D \\ 4D + \frac{9}{4}D = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow D = \frac{2}{25} \quad \text{et} \quad C = -\frac{3}{50}.$$

D'où une solution particulière.

$$y_0(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{50}\cos(2x) + \frac{2}{25}\sin(2x)$$

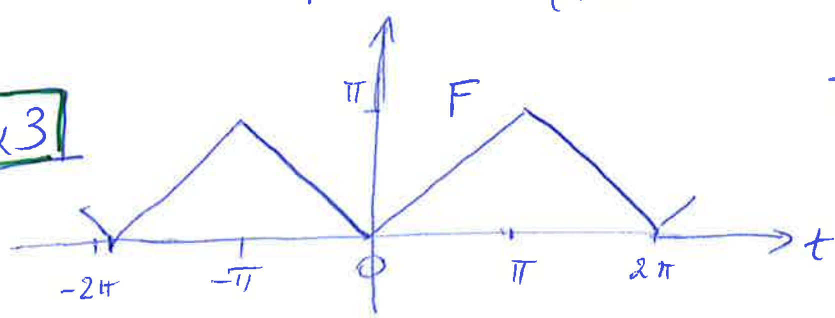
Donc la solution générale s'écrit.

$$y(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x} + y_0(x)$$

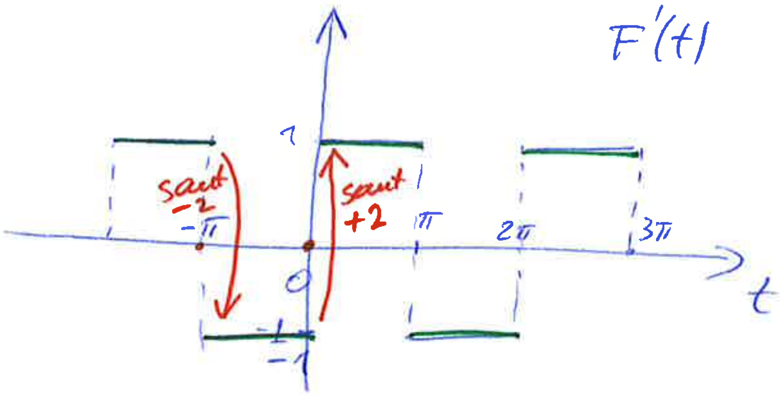
Ex2 $a_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et $b_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, mais $b \neq O\left(\frac{1}{n^3}\right)$

donc f est continue, mais f' n'est pas continue. (résultat du cours).

Ex3



F est paire $\Rightarrow b_n(F) = 0$. $\forall n \in \mathbb{N}$.



$p = \frac{1}{2}$ période $= \pi$.

F' a 2 sauts sur l'intervalle $[-\pi, \pi[$ en $t=-\pi$ et en $t=0$.

$$F''(t) = 0 \Rightarrow a_n(F'') = 0 \quad \text{et} \quad b_n(F'') = 0.$$

$$a_0(F) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\,\frac{\pi^2}{2} = \pi.$$

Formule des sauts : $a_n(F) = -\frac{1}{n}\, b_n(F')$

[$b_n(F) = 0$ (car F paire).].

$$b_n(F') = \underset{\overset{\parallel}{0}}{\frac{1}{n} a_n(F'')} + \frac{1}{n\pi}\left[(-2)\cos(-n\pi) + 2\cos 0\right].$$

[F' a 2 sauts : en $t=-\pi$ et en $t=0$]

$$= \frac{1}{n\pi}\left[2 - 2(-1)^n\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ \dfrac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow a_n = -\frac{1}{n}\, b_n(F') = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ -\dfrac{4}{n^2\pi} & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

d'où le développement en série de Fourier de F

$$F(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \left(\frac{-4}{n^2\pi}\right) \cos(nt).$$

On cherche une solution particulière $y(t)$ sous la forme

$$y(t) = y_0(t) + \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ impair}}} y_n(t) \quad \text{avec } y_n(t) = C_n \cos(nt)$$

avec $y_0'' + 4y_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y_0(t) = \frac{\pi}{8}$

et pour $n \geq 1$, n impair, $y_n'' + 4y_n = C_n \cos(nt)$.

donc, comme $y_n''(t) = -C_n n^2 \cos(nt)$

on obtient l'équation :

$$C_n(4-n^2) = -\frac{4}{n^2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \quad C_n = \frac{4}{n^2\pi(n^2-4)}.$$

On obtient la solution particulière.

$$y(t) = \frac{\pi}{8} + \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{4}{n^2\pi(n^2-4)} \cos(nt)$$

Comme $a_n = O(\frac{1}{n^4})$ et $b_n = 0$, on voit que y, y', y'' ~~et~~ sont des fonctions continues, mais que y''' n'est pas continue.

La solution générale de l'éq. non-homogène s'écrit :

$$y(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t) + \frac{\pi}{8} + \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{4}{\pi n^2(n^2-4)} \cos(nt).$$

Il reste à déterminer A et B

$$0 = y(0) = A + \frac{\pi}{8} + \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{4}{\pi n^2(n^2-1)} \Rightarrow A = -\frac{\pi}{8} - \sum_{n \text{ imp}} \frac{1}{\pi n^2(n^2-4)}$$

$$0 = y'(0) = 2B \Rightarrow B = 0.$$

$\boxed{\text{Ex } 4}$ 1) Attention : f n'est pas paire ! $a<t<b$.

• $$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_a^b$$

$$= \frac{i}{2\pi\omega}\left(e^{-i\omega b} - e^{-i\omega a}\right).$$

• si $b=-a$, alors $\hat{f}(\omega) = \frac{i}{2\pi\omega}\left(e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}\right)$.
(noter que $a<0$!)

notons que $2i\sin(\omega a) = e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}$.

donc $$\hat{f}(\omega) = \frac{-\sin(\omega a)}{\pi\omega} = \frac{\sin(\omega|a|)}{\pi\omega}.$$

2) • $$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-kt} e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-(k+i\omega)t}}{-(k+i\omega)}\right]_0^{+\infty}$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[0 - \frac{1}{-(k+i\omega)}\right]$$

noter que $\lim_{t\to+\infty} e^{-(k+i\omega)t} = 0$ car $k>0$.

$$= \frac{1}{2\pi(k+i\omega)}$$

$\boxed{\text{Ex 5}}$ On pose $g(t) = e^{2it} f\left(\frac{t-\pi}{3}\right)$.

Donc la transformée de Fourier $\hat{g}(\omega)$ de g est égale à :

pour $\omega \in \mathbb{R}$: $$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2it} f\left(\frac{t-\pi}{3}\right) e^{-i\omega t} dt$$

on fait le changement de variable $u = \frac{t-\pi}{3}$

donc $du = \frac{1}{3} dt$. $\iff t = 3u+\pi$

$$\text{donc } \hat{g}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i(3u+\pi)} f(u) e^{-i\omega(3u+\pi)} \cdot 3\, du$$

Noter que $e^{2i\pi} = 1$!

$$= \frac{3}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{6iu} \cdot e^{-i\omega(3u+\pi)} f(u)\, du$$

$$= \frac{3e^{-i\omega\pi}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu(3\omega-6)} f(u)\, du$$

$$\boxed{\hat{g}(\omega) = 3e^{-i\omega\pi} \hat{f}(3\omega-6)}$$