Corrigé de l'examen du 12 janvier 2017.

Exercice 1

On peut écrire cette intégrale comme une intégrale sur le contour γ = cercle unité paramétré par $\theta \mapsto e^{i\theta} = z$

de la fonction $f(z) = \dfrac{1+\cos 2\theta}{\sqrt{2} - \sin\theta}$ via le changement de variable $z = e^{i\theta}$.

$$\Rightarrow dz = i e^{i\theta}\, d\theta = iz\, d\theta$$

$$\Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

Ainsi :

$$2i \sin\theta = z - \bar{z} = z - z^{-1}$$

$$\sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}$$

$$2\cos 2\theta = z^2 + \bar{z}^2 = z^2 - z^{-2}$$

$$\cos 2\theta = \frac{z^2 - z^{-2}}{2}.$$

Donc

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{\sqrt{2} - \sin\theta}\, d\theta = \int_\gamma \frac{1 + \frac{1}{2}(z^2 + z^{-2})}{\sqrt{2} - \frac{1}{2i}(z - z^{-1})}\, \frac{dz}{iz}$$

$$= \int_\gamma \frac{\dfrac{2 + z^2 + z^{-2}}{\cancel{2}}}{\dfrac{2i\sqrt{2} - z + z^{-1}}{\cancel{2i}}} \cdot \frac{dz}{\cancel{i}z}$$

$$= \int_\gamma \frac{2 + z^2 + z^{-2}}{z(2i\sqrt{2} - z + z^{-1})}\, dz$$

$$= \int_\gamma \frac{2z^2+z^4+1}{z^2(2i\sqrt{2}z - z^2+1)}\, dz$$

$$= \int_\gamma \frac{-(z^2+1)^2}{z^2(z^2-2i\sqrt{2}z-1)}\, dz$$

Pour factoriser le polynôme $z^2-2i\sqrt{2}z-1$ on calcule ses racines : $\Delta = -8+4 = -4 = (2i)^2$

d'où : $z_1 = \frac{2i\sqrt{2}+2i}{2} = i(1+\sqrt{2}) \notin \text{Intérieur}(\gamma)$.

et $z_2 = \frac{2i\sqrt{2}-2i}{2} = i(-1+\sqrt{2}) \in \text{Intérieur}(\gamma)$.

Notons les égalités $z_1 z_2 = -1$ et $z_1+z_2 = 2i\sqrt{2}$.

<u>d'où</u> : $I = \int_\gamma \underbrace{\frac{-(z^2+1)^2}{z^2(z-z_1)(z-z_2)}}_{=f(z)}\, dz$

La fonction f a 3 pôles :

- pôle double en $z=0$ $\in \text{Int}(\gamma)$
- pôle simple en $z=z_1$ $\notin \text{Int}(\gamma)$
- pôle simple en $z=z_2$ $\in \text{Int}(\gamma)$.

D'après la formule des résidus, on a.

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2i\pi\left(\text{Res}(f, z=0) + \text{Res}(f, z=z_2)\right).$$

Calcul des résidus :

1) $\underline{Res(f_1 z=0)}$: ce résidu est calculé par la formule

$$Res(f_1 z=0) = \left(z^2 f(z)\right)'\Big|_{z=0}.$$

or $$z^2 f(z) = \frac{-(z^2+1)^2}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

$$\Rightarrow \left(z^2 f(z)\right)' = \frac{-2(z^2+1)\cdot 2z(z-z_1)(z-z_2) + (z^2+1)(2z-2i\sqrt{2})}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}$$

d'où $$\left(z^2 f(z)\right)'\Big|_{z=0} = \frac{1\cdot(-2i\sqrt{2})}{(z_1\cdot z_2)^2} = -2i\sqrt{2}.$$

2) $\underline{Res(f_1 z=z_2)}$: ce résidu est calculé par la formule

$$Res(f_1 z=z_2) = (z-z_2)f(z)\Big|_{z=z_2}$$

$$\Rightarrow Res(f_1 z=z_2) = \frac{-(z^2+1)^2}{z^2(z-z_1)}\Bigg|_{z=z_2}$$

$$= \frac{-(-2+2\sqrt{2})^2}{(-3+2\sqrt{2})(-2i)}$$

$$= \frac{-(4+8-8\sqrt{2})}{(-3+2\sqrt{2})(-2i)}$$

$$= \frac{(-12+8\sqrt{2})}{(-3+2\sqrt{2})(-2i)} = \frac{4}{-2i} = 2i$$

$z_2^2 = (-1)(-1+\sqrt{2})^2$

$= (-1)(1+2-2\sqrt{2})$

$= -(3-2\sqrt{2})$

$= -3+2\sqrt{2}.$

$z_2 - z_1 = -2i$

D'où le résultat :

$$I = 2i\pi\left(-2i\sqrt{2} + 2i\right) = 4\pi\left(-1 + \sqrt{2}\right)$$

Exercice 2 :

1.) Cette intégrale converge, car elle converge absolument :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\, dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\cos t|}{1+t^2}\, dt \qquad |\cos t| \leq 1$$

$$< \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

$$= \left[\mathrm{Arctan}(t)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

2.) la fonction $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{1+z^2}$ a 2 pôles simples.

1 pôle en $z = i$ et 1 pôle en $z = -i$

D'après la formule des résidus, on a donc

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 2i\pi \, \mathrm{Res}\left(f(z), z = i\right)$$

Or $\mathrm{Res}\left(f(z), z=i\right) = \left(\dfrac{e^{iz}}{z+i}\right)\Big|_{z=i} = \dfrac{e^{-1}}{2i}$

Donc : $$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 2i\pi \cdot \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}.$$

3.) $$\int_{\gamma_1} \frac{\cos t + i\sin t}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{\cos t}{1+t^2}\,dt + i\underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{\sin t}{1+t^2}\,dt}_{\substack{\text{fonction impaire.}\\ \text{donc } \int_{-R}^{R} = 0.}}$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{\cos t}{1+t^2}\,dt$$

Donc $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\,dt$

4.) On paramètre γ_2 par $z = Re^{i\theta}$ avec $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

donc $dz = Rie^{i\theta}\,d\theta$

$(dz = iz\,d\theta)$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = iR\int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{1+R^2e^{2i\theta}}\,e^{i\theta}\,d\theta$$

Notons que $\displaystyle\left|\frac{e^{iRe^{i\theta}}}{1+R^2e^{2i\theta}}\,e^{i\theta}\right| = \frac{\left|e^{iR\cos\theta - R\sin\theta}\right|}{|1+R^2e^{2i\theta}|}\underbrace{|e^{i\theta}|}_{=1}$

$$= \frac{e^{-R\sin\theta}}{|1+R^2e^{2i\theta}|} \leqslant \frac{e^{-R\sin\theta}}{R^2-1} \leqslant \frac{1}{R^2-1}$$

(on suppose que $R>1$).

donc $\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \leqslant R \int_0^{\pi} \frac{1}{R^2-1}\, d\theta$

$$= \frac{\pi R}{R^2-1}$$

Comme $\lim\limits_{R\to+\infty} \frac{\pi R}{R^2-1} = 0$, on obtient que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$$

5.) On conclut que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{e}$

Exercice 3

1.) D'après le formulaire on a :

$$\mathcal{L}(e^{at}\sin t) = \frac{1}{(s-a)^2+1}$$

et $\mathcal{L}(e^{at}\cos t) = \frac{s-a}{(s-a)^2+1}$.

Comme $\frac{3s+4}{s^2-2as+a^2+1} = \frac{3(s-a)+(3a+4)}{(s-a)^2+1}$.

on obtient $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s+4}{s^2-2as+a^2+1}\right) = 3e^{at}\cos t + (3a+4)e^{at}\sin t$

$$= e^{at}(3\cos t + (3a+4)\sin t)$$

La réponse impulsionnelle du système est donc

$$f(t) = e^{at}(3\cos t + (3a+4)\sin t).$$

2. Le système est stable ssi $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

ssi $a < 0$

Exercice 4 : En utilisant le formulaire et en notant $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$, on obtient

$$\mathcal{L}(y''(t)) = s^2 Y(s) - 1$$
$$\mathcal{L}(y'(t)) = s\,Y(s)$$
$$\mathcal{L}(y(t)) = Y(s)$$
$$\mathcal{L}(e^{-t}) = \frac{1}{s+1}$$

D'où l'équation :

$$\left(s^2 Y(s) - 1\right) - 3\left(s\,Y(s)\right) + 2Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$Y(s)\left(s^2 - 3s + 2\right) = \frac{1}{s+1} + 1 = \frac{s+2}{s+1}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{(s+2)}{(s+1)(s^2-3s+2)}$$

$$= \frac{1}{6(s+1)} - \frac{3}{2(s-1)} + \frac{4}{3(s-2)}$$

Comme $\mathcal{L}(e^{-at}) = \dfrac{1}{s+a}$, on obtient.

$$y(t) = \left(\frac{1}{6}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{t} + \frac{4}{3}e^{2t}\right) \quad \text{pour } t \geq 0.$$