Optimisation
L3 MASS

Université de Nice
Année 2013-2014

Examen du 11 avril 2014

Exercice 1 - On considère la fonction $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^4$.

1. Déterminer le gradient $(\nabla f)_x$ de f en tout point $x \in \mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la matrice hessienne $\mathcal{H}(f)_x$ de f en tout point de $x \in \mathbb{R}^2$.
3. Déterminer le signe de la forme quadratique associée à la matrice hessienne $\mathcal{H}(f)_x$.
4. Est-ce que f est convexe ? strictement convexe ?

Exercice 2 - On considère la fonction

$$J(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

sous la contrainte

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{64} + \frac{x_2^2}{36} + \frac{x_3^2}{25} - 1 = 0.$$

1. Ecrire le lagrangien $\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, \lambda)$ associé à ce problème.
2. Déterminer les points critiques du lagrangien.
3. Pour chaque point critique, déterminer sa nature par le critère de la matrice hessienne.
4. **BONUS.** Donner une interprétation géométrique de ce problème d'optimisation.

Exercice 3 - A l'aide de l'algorithme du simplexe déterminer le maximum de la fonction

$$Z(x_1, x_2) = 18x_1 + 6x_2,$$

sous les contraintes

$$x_1 + x_2 \leq 18, \quad 5x_1 + 4x_2 \leq 80, \quad 0 \leq x_1 \leq 12, \quad 0 \leq x_2 \leq 15.$$

Représenter dans le plan le domaine défini par les inégalités ci-dessus ainsi que le sommet du polygône où Z atteint le maximum.