Corrigé interro

dimanche 5 novembre 2017 11:30 sur 8,5

Exercice 1 :

1)

$$(E)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 & (E_1) \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 & (E_2) \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 & (E_3) \\ 2x_1 - 6x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 0 & (E_4) \end{cases}$$

L'ordre des variables est l'ordre naturel. Le système E est ordonné : $v(E_1) = v(E_2) = v(E_3) = v(E_4) = 1$.
Utilisons E_1 pour faire monter l'ordre des autres équations.
E a même solution que le système :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 & (E_1) \\ -5x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0 & (E_2' = E_2 - 2E_1) \\ -5x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0 & (E_3' = E_3 - 3E_1) \\ -10x_2 + 8x_3 - 8x_4 = 0 & (E_4' = E_4 - 2E_1) \end{cases}$$

Nous obtenons $v(E_1) < v(E_2') = v(E_3') = v(E_4') = 2$.
Utilisons E_2' pour faire monter l'ordre des équations suivantes. E a même solution que le système :

$$\begin{array}{lll} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 & = 0 & E_1 \\ -5x_2 + 4x_3 - 4x_4 & = 0 & E_2' \\ 0 & = 0 & E_3' - E_2' \\ 0 & = 0 & E_4' - 2E_2' \end{array}$$

Ou encore que le système triangulé :

(2)

$$\boxed{\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -5x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}}$$

Les variables libres de ce système triangulé sont x_3 et x_4.

Résolvons ce système triangulé. La dernière équation donne $x_2 = \frac{4}{5}x_3 - \frac{4}{5}x_4$

$$x_1 = -\frac{8}{5}x_3 + \frac{8}{5}x_4 + x_3 - x_4$$
$$= -\frac{3}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4.$$

(1) L'ensemble F des solutions de E est donc :

$$F = \left\{ \left(-\frac{3}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4,\ \frac{4}{5}x_3 - \frac{4}{5}x_4,\ x_3, x_4\right) \text{ tels que } x_3 \text{ et } x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

(1) 3,5

Nous obtenons :

$$\boxed{F = \left\{ x_3\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, 0\right) + x_4\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0, 1\right) \text{ tels que } x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}}$$

0,5 En particulier $\boxed{(0,0,0,0),\ \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, 0\right) \text{ et } \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0, 1\right)}$ sont trois solutions de E.

2)

$$(E')\quad \begin{cases} y_1 - y_2 + 2y_3 + y_4 = 0 & (E_1') \\ -2y_1 + 2y_2 - y_3 + 2y_4 = 0 & (E_2') \\ -6y_1 + 6y_2 - 6y_3 + 2y_4 = 0 & (E_3') \end{cases}$$

procédons de même : l'ordre des variables est l'ordre naturel. Le système est ordonné.

$$\begin{cases} y_1 - y_2 + 2y_3 + y_4 = 0 & (E_1') \\ 3y_3 + 4y_4 = 0 & (E_2' + 2E_1' = E_2'') \\ 6y_3 + 8y_4 = 0 & (E_3' + 6E_1' = E_3'') \end{cases}$$

Le système est ordonné $v(E_1') < v(E_2'') = v(E_3'')$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 + 2y_3 + y_4 = 0 & E_1' \\ 3y_3 + 4y_4 = 0 & E_2'' \\ 0 = 0 & E_3'' - 2E_2'' \end{cases}$$

(2) Donc, E' a même solution que le système triangulé

$$(*)\quad \boxed{\begin{cases} y_1 - y_2 + 2y_3 + y_4 = 0 \\ 3y_3 + 4y_4 = 0 \end{cases}}$$

Les variables libres de E' sont y_2 et y_4. Résolvons ce dernier système :

(2) sur 3,5

$$y_3 = -\frac{4}{3}y_4$$

$$y_1 = y_2 - 2y_3 - y_4 = y_2 + \frac{8}{3}y_4 - y_4 = y_2 + \frac{5}{3}y_4$$

(1) Donc, les solutions F' de E' sont

$$F' = \left\{ \left(y_2 + \frac{5}{3}y_4,\ y_2,\ -\frac{4}{3}y_4,\ y_4\right) \text{ tels que } y_2, y_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\boxed{F' = \left\{ y_2(1,1,0,0) + y_4\left(\frac{5}{3}, 0, -\frac{4}{3}, 1\right) \text{ tels que } y_2, y_4 \in \mathbb{R} \right\}}$$

Ainsi, F' est l'ensemble des combinaisons linéaires des 2 vecteurs $\boxed{(1,1,0,0) \text{ et } \left(\frac{5}{3}, 0, -\frac{4}{3}, 1\right)}$ de $\mathbb{R}^4$.

0,5 Suivant le cours ces 2 vecteurs constituent une base de F'.

3) Pour montrer que $u = \left(0, 1, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) \in F'$ il suffit de vérifier que u vérifie les 2 équations $(*)$.

$$0 - 1 + \frac{8}{5} - \frac{3}{5} = 0 - \frac{5}{5} + \frac{8}{5} - \frac{3}{5} = 0$$

1,5

$$3\left(\frac{4}{5}\right) + 4\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{12}{5} - \frac{12}{5} = 0.$$

(3) sur 2

Ainsi, il existe α, β réels tels que

$$\left(0, 1, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) = \alpha(1,1,0,0) + \beta\left(\frac{5}{3}, 0, -\frac{4}{3}, 1\right)$$
$$= \left(\alpha + \frac{5}{3}\beta,\ \alpha,\ -\frac{4}{3}\beta,\ \beta\right)$$

Il vient $\alpha = 1, \beta = -\frac{3}{5}$ $\boxed{\left(1, -\frac{3}{5}\right)}$ sont donc les coordonnées de u dans la base $(1,1,0,0), \left(\frac{5}{3}, 0, -\frac{4}{3}, 1\right)$ de F'.