Corrigé interro

$\boxed{\text{Exercice 2}}$: 8 $\quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{1)}$ $\det P = 2\times 1 - 4\times 1 = \boxed{-2}$

Le déterminant de P est non nul, donc P est inversible.

La formule donne :

2 $$P^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

$\boxed{2)}$ $A_0 = P \qquad B_0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_0 P = A_0$

$A_1 = T_{2,1}(-2)\, A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B_1 = T_{2,1}(-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_1 P = A_1$

$A_2 = D_1(\tfrac{1}{2})\, D_2(-1)\, A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_2 = D_1(\tfrac{1}{2})\, D_2(-1)\, B_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B_2 P = A_2$

$A_3 = T_{1,2}(-\tfrac{1}{2})\, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_3 = T_{1,2}(-\tfrac{1}{2})\, B_2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

2 $\qquad B_3 P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc, $P^{-1} = B_3 = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

On retrouve le résultat donné par la formule.

De plus :

$$P^{-1} = B_3 = T_{1,2}(-1/2)\, A_2 = T_{1,2}(-\tfrac{1}{2})\, D_1(\tfrac{1}{2})\, D_2(-1)\, A_1$$

$$\boxed{P^{-1} = T_{1,2}(-1/2)\, D_1(\tfrac{1}{2})\, D_2(-1)\, T_{2,1}(-2)}$$

D'où

$$P = T_{2,1}(-2)^{-1}\, D_2(-1)^{-1}\, D_1(\tfrac{1}{2})^{-1}\, T_{1,2}(-\tfrac{1}{2})^{-1}$$

$$\boxed{P = T_{2,1}(2)\, D_2(-1)\, D_1(2)\, T_{1,2}(\tfrac{1}{2})}$$

$\boxed{3)}$ $P^{-1}AP = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

1 $= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

$\boxed{4)}$ Si $au + bv = (0,0)$ avec a, b réels

Nous obtenons

$a(1,2) + b(1,1) = (0,0)$

soit $(a+b,\ 2a+b) = (0,0)$

soit $\begin{cases} a+b=0 & E_1 \\ 2a+b=0 & E_2 \end{cases}$

1 Il en résulte $a = b = 0$. En effet $E_2 - 2E_1$ donne $b=0$, d'où $a=0$. Ainsi (u,v) est une famille libre. Comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2 (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{5)}$ $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{-\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

Supposons que pour tout entier n :

$A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Nous obtenons

$A^{n+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = A\left(A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$A^{n+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A\left(A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = A\left((-1)^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = (-1)^n A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1 $= (-1)^n(-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)^{n+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi, par récurrence, nous avons établi que pour tout entier n :

$$\boxed{A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

6) Comme P est inversible $XP = A$ équivaut à

$(XP)P^{-1} = AP^{-1}$

soit $XPP^{-1} = AP^{-1}$

et $X = AP^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

1 $= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}+4 & -\frac{3}{2}-2 \\ 2+6 & -2-3 \end{pmatrix}$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 11/2 & -7/2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}}$$

$\boxed{\text{Exercice 3}}$

1) $\det M = 1 \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 0 \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= -1 + 4 = \boxed{3}$ 1

M est donc inversible. La comatrice de M est

$$\text{com}(M) = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$ 2

La formule donne

$$M^{-1} = \frac{1}{3}\,{}^t(\text{com}(M)) = \frac{1}{3}\,{}^t\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

2) Le système est équivalent au système matriciel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Il admet donc une seule solution : 2,5

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

D'où $\boxed{(a,b,c) = (-\sqrt{3},\ \sqrt{3}, \sqrt{3})}$