Exercice sur le support 6

Exercice : p_1 désigne le prix du produit 1, p_2 du produit 2 et r le budget du consommateur.

Soit $U = \{(p_1, p_2, r) \in \mathbb{R}^3$ tels que $p_1 > 0,\ p_2 > 0,\ r > 0\}$.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ la fonction numérique définie par

$$f(p_1, p_2, r) = \frac{p_2 r}{p_1(p_1 + p_2)}.$$

1) Montrer que U est un ouvert. Justifier que f admet des dérivées partielles à tout ordre continues sur U.

2) Calculer les dérivées partielles de f.

3) Fixons $p_1 > 0$, $r > 0$, la fonction

$$]0, \infty[\to \mathbb{R} \qquad p_2 \mapsto f(p_1, p_2, r) = \frac{p_2 r}{p_1(p_1 + p_2)}$$

est-elle décroissante ? croissante ?

<u>Solution</u> : 1) Soit $U_1 = \{(p_1, p_2, r) \in \mathbb{R}^3$ tels que $p_1 > 0\}$. Le sous-ensemble U_1 de $\mathbb{R}^3$ est défini à partir d'une fonction polynomiale ($(p_1, p_2, r) \mapsto p_1$) et d'une inégalité stricte. C'est donc un ouvert de $\mathbb{R}^3$. De même $U_2 = \{(p_1, p_2, r) \in \mathbb{R}^3$ tels que $p_2 > 0\}$ et $U_3 = \{(p_1, p_2, r) \in \mathbb{R}^3$ tels que $r > 0\}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^3$. Or, $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$. Le sous-ensemble U est donc ouvert comme intersection d'ouverts. Une fonction rationnelle admet des dérivées partielles à tout ordre continues sur son ouvert de définition. Il en est de même de sa restriction à tout ouvert, donc de f

2) $$\frac{\partial f}{\partial p_1}(p_1, p_2, r) = -\frac{p_2 r (2p_1 + p_2)}{p_1^2 (p_1 + p_2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial p_2}(p_1, p_2, r) = \frac{r}{(p_1 + p_2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r}(p_1, p_2, r) = \frac{p_2}{p_1 (p_1 + p_2)}.$$

3) La dérivée de la fonction considérée est $\dfrac{\partial f}{\partial p_2}(p_1, p_2, r) = \dfrac{r}{(p_1 + p_2)^2} > 0$ sur U. La fonction considérée est donc croissante

Exercice : On considère la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1,x_2) = x_2^3 x_1 - x_1 x_2^2 - x_2^2$$

1) Justifier que f admet des dérivées partielles continues sur $\mathbb{R}^2$ et à tout ordre. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2. Vérifier l'identité de Schwarz

2) Déterminer les points critiques de f

Solution : f est une fonction polynomiale. Donc admet des dérivées partielles continues sur $\mathbb{R}^2$ et à tout ordre

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = x_2^3 - x_2^2 = x_2^2\,(x_2 - 1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,x_2) = 3x_2^2 - 2x_2 = x_2(3x_2 - 2) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = 3x_2^2 x_1 - 2x_1 x_2 - 2x_2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) = 3x_2^2 - 2x_2 = x_2(3x_2 - 2) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) = 6x_2 x_1 - 2x_1 - 2$$

On constate bien que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,x_2) = 3x_2^2 - 2x_2$

(identité de Schwarz)

2) Les points critiques de f sont les $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

soit
$$\begin{cases} x_2^2 (x_2 - 1) = 0 \\ 3x_2^2 x_1 - 2x_1 x_2 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Or $x_2^2 (x_2 - 1) = 0$ équivaut à $x_2 = 0$ ou $x_2 = 1$.

Les points critiques de f sont donc les solutions de

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 3x_2^2 x_1 - 2x_1 x_2 - 2x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ 3x_2^2 x_1 - 2x_1 x_2 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 - 2 = 0 \end{cases}$$

Donc ceux $\underline{\{ (x_1, 0) \text{ tels que } x_1 \in \mathbb{R} \} \cup \{ 2, 1 \}}$.

est l'ensemble des points critiques de f.

<u>Exercice :</u> On considère la fonction :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1 + 2x_2 + 17$$

1) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.

2) Déterminer les points critiques de f.

1) $$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 - 2x_2 + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -2x_1 + 6x_2 + 2 .$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = -2 \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = -2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = 6 .$$

2) Les points critiques de f sont les solutions (x_1, x_2) du système :

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 1 = 0 \\ -2x_1 + 6x_2 + 2 = 0 \end{cases} .$$

En ajoutant ces équations, on obtient $4x_2 + 3 = 0$, soit

$$x_2 = -\frac{3}{4} .$$

remplaçons x_2 par sa valeur dans la première équation, on obtient :

$$2x_1 + \frac{3}{2} + 1 = 0$$

$$2x_1 + \frac{5}{2} = 0$$

$$x_1 = -\frac{5}{4}$$

Ainsi, f a un unique point critique $\left(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right)$.

Exercice 3 : Soit K le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$

$$K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x_1 \leq 1,\ x_1 \geq -1,\ x_2 \leq 1,\ x_2 \geq -1\}$$

a) Montrer que K est un ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$. Représenter K.

Montrer que K est un ensemble borné de $\mathbb{R}^2$

b) Justifier pourquoi la fonction

$$g : K \to \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \mapsto g(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1 + 2x_2 + 17$$

admet en un point de K un maximum et en un point de K un minimum.

c) Soit $a = (a_1, a_2)$ un point de K où g admet un extremum, montrer que ce point n'appartient pas à

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x_1 < 1,\ x_1 > -1,\ x_2 < 1,\ x_2 > 1\}.$$

Solution : a) K est l'intersection des 4 sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$

$F_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 \leq 1\}$

$F_2 = \{$ — $x_1 \geq -1\}$

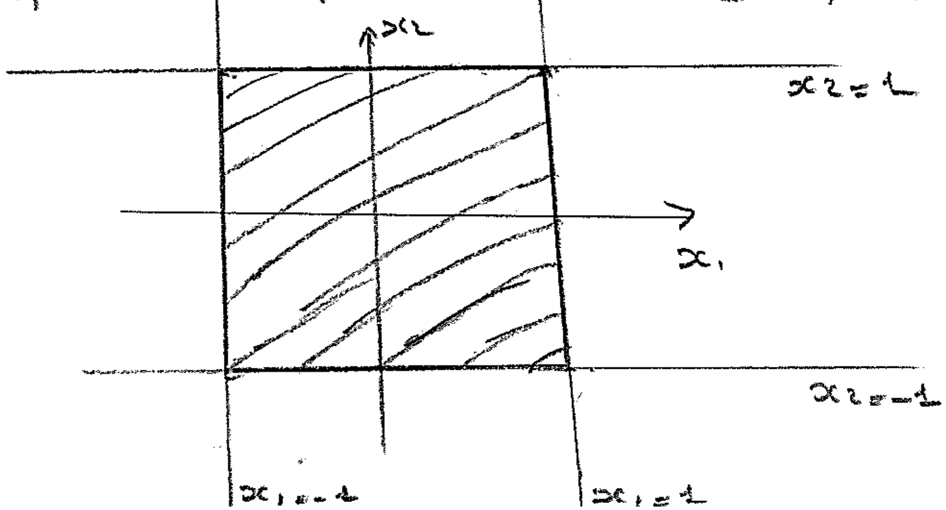
$F_3 = \{$ — $x_2 \leq 1\}$

$F_4 = \{$ — $x_1 \geq -1\}$

Ces ensembles sont fermés car définis à partir d'inégalités larges et de fonctions polynomiales (donc continues)
(cf cours n°6 page 6)

Ainsi <u>K est fermé</u> comme intersection de fermés.

Les F_1, F_2, F_3, F_4 sont des demi-plans délimités par les droites d'équations respectivement $x_1 = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_2 = -1$



K zone hachurée
(le carré avec son bord)

K est visiblement contenu dans le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 2

C'est donc un borné de $\mathbb{R}^2$

b) g est la restriction à K de la fonction polynomiale f de l'exercice précédent. Ainsi g est la restriction à K d'une fonction continue. Comme K est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, d'après le cours (cours 7, théorème p 10), il existe un point de K où g admet un maximum (resp. un minimum).

c) On montre comme en a) que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (intersection de 4 ouverts). Notons que $U \subset K$. Si un extremum de g est atteint en un point a de U, la fonction f de l'exercice précédent aurait un extremum local en ce point puisque U est ouvert. D'après la proposition cours 7 p 9, le point a serait un point critique de f. Donc $a = \left(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right)$, or $a \notin K$. C'est donc impossible.