Exercice type / cours 7

Exercice type (bis) (extremum libre)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1,x_2) = 2x_1^2 - x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_1 + 3x_2 + 17$

1) Justifier que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
Calculer ces dérivées partielles.

2) Montrer que f admet un unique point critique que l'on précisera

3) Quelle est la nature de ce point critique (maximum local, minimum local) ?

Solution : 1) f est une fonction polynomiale (de deux variables). Elle admet donc des dérivées partielles à tout ordre. Ces dérivées partielles sont-elles même des fonctions polynomiales

Le calcul donne :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = 4x_1 - x_2 + 4 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = -x_1 + 6x_2 + 3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,x_2) = -1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) = 6$$

2) Les points critiques de f sont les couples de réels (x_1, x_2) solution du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 4 = 0 \\ -x_1 + 6x_2 + 3 = 0 \end{cases}$$

En multipliant la deuxième équation par 4 et en ajoutant cette équation avec la première, on obtient :

$$23x_2 + 16 = 0 \qquad \text{soit} \qquad x_2 = -\frac{16}{23}$$

En remplaçant dans deuxième équation par exemple, on obtient :

$$-x_1 + 6\left(-\frac{16}{23}\right) + 3 = 0$$

soit après calcul $\quad x_1 = -\dfrac{27}{23}$.

Ainsi f admet le couple $\left(-\dfrac{27}{23}, -\dfrac{16}{23}\right)$ comme unique point critique.

3) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(-\frac{27}{23}, -\frac{16}{23}\right) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(-\frac{27}{23}, -\frac{16}{23}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\left(-\frac{27}{23}, -\frac{16}{23}\right)\right)^2$$

$$= 4 \times 6 - (-1)^2 = 24 - 1 = 23 > 0$$

(strictement)

Comme cette quantité est positive, f admet en $\left(-\dfrac{27}{23}, -\dfrac{16}{23}\right)$ un extremum local

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(-\frac{27}{23}, -\frac{16}{23}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(-\frac{27}{23}, -\frac{16}{23}\right) = 4 + 6 = 10 > 0$$

Comme de plus cette quantité est positive, <u>f admet en</u> $\left(-\dfrac{27}{23}, -\dfrac{16}{23}\right)$ <u>un minimum local</u>

Exercice 2 On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2) \mapsto f(x_1,x_2) = x_1^3 + x_1^2 + x_2^3 + x_2^2 + 17$$

1) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction polynomiale f, puis ses points critiques.

2) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f, puis étudier la nature des points critiques de f

Solution : 1) $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = 3x_1^2 + 2x_1$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = 3x_2^2 + 2x_2$

Les points critiques de f sont les couples de reels (x_1, x_2) solutions du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 3x_1^2 + 2x_1 = 0 \\ 3x_2^2 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{soit} \quad \begin{cases} x_1(3x_1+2) = 0 \\ x_2(3x_2+2) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x_1 = 0 \text{ ou } x_1 = -2/3) \\ \quad \text{et} \\ (x_2 = 0 \text{ ou } x_2 = -2/3) \end{cases}$$

f admet donc quatre points critiques :

$$(0,0) \qquad \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \qquad \left(0, -\frac{2}{3}\right) \qquad \left(-\frac{2}{3}, 0\right)$$

2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) = 6x_1 + 2$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,x_2) = 0$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) = 6x_2 + 2$

En chaque point critique (a,b) de f, regardons le signe de

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a,b)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a,b)\right)^2 \quad \text{et de}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a,b) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a,b)$$

On obtient que f admet en $(0,0)$ un minimum local, en $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ un maximum local et n'admet pas en $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ et $\left(0, -\frac{2}{3}\right)$ d'extremum local.

Exercice 3 (extremum avec contrainte)

On considère les applications

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto f(x,y) = x^3 + y^3$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto g(x,y) = x^2 + y^2$$

1) Montrer que la restriction de f à $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x^2+y^2=1\}$ admet en un point de B un maximum et en un point de B un minimum.

2) A l'aide du résultat du cours sur les extremas liés avec contrainte déterminer ces points, la valeur du maximum et du minimum de la restriction de f à B

Solution : 1) On montre (voir exercices des chapitres précédents) que B est un ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^2$. La fonction f est polynomiale donc continue. Sa restriction à B

$$f_{|B} : B \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto f_{|B}(x,y) = x^3 + y^3$$

est donc une fonction continue. Sa source est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$. Elle admet donc en un point de B un maximum (resp. un minimum)

2) Soit (a,b) un point de B où f admet un extremum.
Ce point correspond à un point où la fonction f admet un extremum avec la contrainte $g(x,y)=1$. Les fonctions f et g admettent des dérivées partielles d'ordre un continues sur $\mathbb{R}^2$
Le point (a,b) est donc solution du système :

$$\begin{cases} g(x,y)=1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (3x^2)(2y)-(3y^2)(2x)=0 \end{cases}$$

$$\text{soit} \quad \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 6xy(x-y)=0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ \text{et} \\ x=0 \text{ ou } y=0 \text{ ou } x=y \end{cases}$$

Si $x=0$, on obtient $y=\pm 1$

Si $y=0$, — $x=\pm 1$

Si $x=y$, — $2x^2=1$, donc $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ce système admet donc 6 solutions:

$(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ $(-1,0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Or $f(-1,0) = f(0,-1) = -1 < f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} < f\left(1/\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$< f(1,0) = f(0,1) = 1$

Donc, la restriction de f à B admet

son maximum en $(1,0)$ et $(0,1)$ de valeur $f(0,1) = f(1,0) = 1$

son minimum en $(-1,0)$ et $(0,-1)$ — $f(0,-1) = f(-1,0) = -1$.

Exercice 4 : On considère les fonctions

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto g(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$

1) On suppose que la fonction f admet en un point (x_1, x_2, x_3) un minimum avec la contrainte $g(x_1, x_2, x_3) = 1$, déterminer un tel point et la valeur du minimum

2) On peut montrer que la fonction g admet en des points de $\mathbb{R}^3$ un minimum et un maximum avec la contrainte $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ déterminer ces points et la valeur du maximum et du minimum.

<u>Solution</u> : 1) Si (a,b,c) est un tel point, d'après le cours il existe un réel λ_0 tel que (a,b,c,λ_0) soit un point critique de la fonction :

$$h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \qquad (x_1, x_2, x_3, \lambda) \mapsto h(x_1,x_2,x_3,\lambda) = x_1^2+x_2^2+x_3^2 + \lambda(x_1+x_2+x_3-1).$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3,\lambda) = 2x_1+\lambda \\ \dfrac{\partial h}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3,\lambda) = 2x_2+\lambda \\ \dfrac{\partial h}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3,\lambda) = 2x_3+\lambda \\ \dfrac{\partial h}{\partial \lambda}(x_1,x_2,x_3,\lambda) = x_1+x_2+x_3-1 \end{cases}$$

ainsi (a,b,c,λ_0) est solution du système :

$$(*)\begin{cases} 2x_1+\lambda = 0 \\ 2x_2+\lambda = 0 \\ 2x_3+\lambda = 0 \\ x_1+x_2+x_3-1=0 \end{cases}$$

On obtient $x_1 = x_2 = x_3 = -\dfrac{\lambda}{2}$, $-\dfrac{3\lambda}{2} - 1 = 0$

Ainsi, $\lambda = -\frac{2}{3}$, $x = y = z = \frac{1}{3}$

Donc $(*)$ a une seule solution $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Il en résulte

$(a,b,c) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Donc le minimum de f avec la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$ est atteint en $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. La valeur de ce minimum est

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{(3)^2} + \frac{1}{(3)^2} + \frac{1}{(3)^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

2) On introduit de même la fonction

$h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1 + x_2 + x_3 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)$

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 1 + 2\lambda x_1 \\
\frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 1 + 2\lambda x_2 \\
\frac{\partial h}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 1 + 2\lambda x_3 \\
\frac{\partial h}{\partial \lambda}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1
\end{array}\right.$$

Les points critiques de h sont (x_1, x_2, x_3, λ) solutions de

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x_1 = 0 \\ 1 + 2\lambda x_2 = 0 \\ 1 + 2\lambda x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \end{cases}$$

On obtient : $x_1 = -\frac{1}{2\lambda}$ $\quad x_2 = -\frac{1}{2\lambda}$ $\quad x_3 = -\frac{1}{2}$

d'où $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1$, soit $\frac{3}{4\lambda^2} = 1$ et $\lambda^2 = \frac{3}{4}$.

Ainsi $\lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x_1 = x_2 = x_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Si (x_1, x_2, x_3) est un point où g admet un extremum avec la contrainte $f(x_1, x_2, x_3) = 1$, ce point est soit $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

soit $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$$g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{3}} < g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

Donc g admet un minimum avec la contrainte $f(x_1, x_2, x_3) = 1$

en $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3}\right)$. La valeur de ce minimum est $-\frac{3}{\sqrt{3}}$.

et g admet un maximum avec la contrainte $f(x_1, x_2, x_3) = 1$

en $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. La valeur de ce maximum est $\frac{3}{\sqrt{3}}$.