Cours 12-13 Semestre 1 Cours n° 1
L1 math en économie

I Généralités sur les ensembles et les applications

1) Ensemble :

Définition (ensemble) Un ensemble est une collection d'objets. Les objets d'un ensemble sont appelés les éléments de cet ensemble

Exemple : Les titres de la bourse de Londres, les 40 titres du CAC 40, les abonnés du journal Le Monde, ...

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ l'ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ l'ensemble des entiers relatifs
L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels (c.a.d. les quotients d'entiers relatifs)
L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels (c.a.d. les nombres à développement décimal arbitraire)

<u>Notation</u> : On convient qu'il existe un ensemble sans élément.
$\emptyset$ Cet ensemble est noté $\emptyset$.

<u>Notation $a \in A$</u> : Soit A un ensemble et a un élément de A.
$a \in A$ se lit a appartient à A.

<u>Définition (sous-ensemble)</u> : Soit A et B deux ensembles. B est dit sous-ensemble de A, si tous les éléments de B sont des éléments de A.

<u>Notation $B \subset A$</u> : Soit B un sous-ensemble de A
$B \subset A$ se lit B contenu dans A

<u>Exemples</u> : $\{-\frac{1}{2}, 4, \frac{9}{17}\}$ est le sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ constitué des 3 éléments : $-\frac{1}{2}, 4, \frac{9}{17}$

$\{x \in \mathbb{R}$ tels que $x \geqslant 0\}$ est l'ensemble des nombres réels x tels que x est positif ou nul, cet ensemble est l'ensemble des nombres réels positifs. Il est noté $\mathbb{R}^+$. C'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$

De même $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq 0\}$ est l'ensemble des nombres réels x tels que x est négatif ou nul. C'est l'ensemble des nombres réels négatifs, $\mathbb{R}^- \subset \mathbb{R}$.

Et $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq 0\}$ est l'ensemble des nombres réels tels que x est non nul. C'est l'ensemble des nombres réels non nuls

2) Opérations sur les ensembles

Définition (Intersection, réunion, complémentaire)

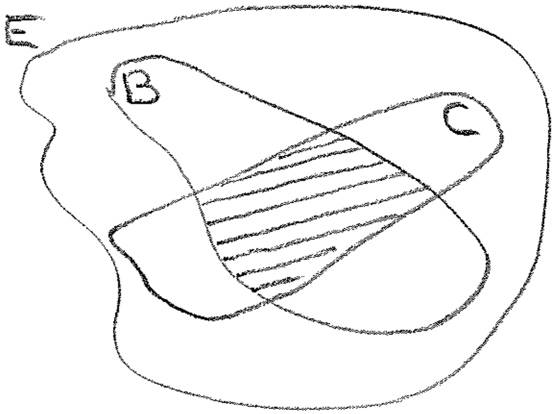
Soit E un ensemble, B et C deux sous-ensembles de E

1) L'intersection de B et de C est le sous-ensemble de E, noté $B \cap C$, défini par $B \cap C = \{x \in E$ tel que $x \in B$ et $x \in C\}$

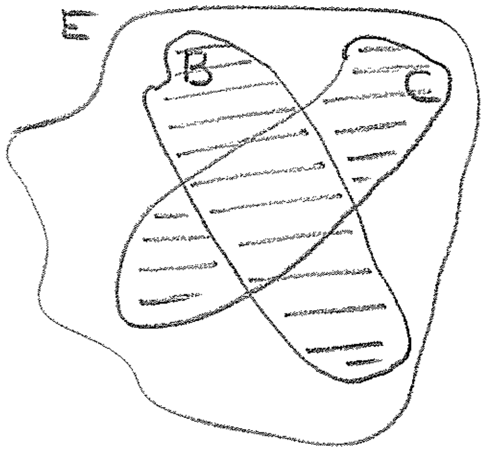
Autrement dit, c'est l'ensemble formé des éléments de E à la fois dans B et dans C.

2) La réunion (ou l'union) de B et de C est le sous-ensemble de E, noté $B \cup C$, défini par $B \cup C = \{x \in E$ tel que $x \in B$ ou $x \in C\}$
Autrement dit, c'est l'ensemble formé des éléments de E qui sont dans B ou dans C.

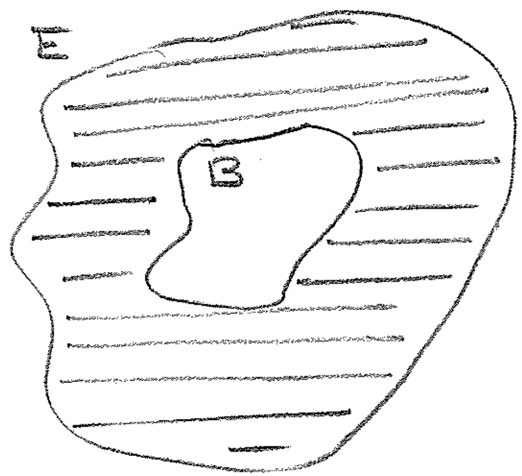
3) Le complémentaire de B dans E est le sous-ensemble de E, noté $E - B$, défini par $E - B = \{x \in E$ tel x n'appartient pas à $B\}$.
Autrement dit, c'est l'ensemble formé des éléments de E qui ne sont pas dans B



$B \cap C$



$B \cup C$



$E - B$

<u>Définition (cardinal d'un ensemble)</u> Le cardinal d'un ensemble A est son nombre d'éléments. On le note $\mathrm{card}(A)$

Bien sur, $\mathrm{card}(A)$ n'est défini que si A a un nombre fini d'éléments.

<u>Formule :</u> Soit B, C deux sous-ensembles de E.

$$\mathrm{card}(B \cup C) = \mathrm{card}(B) + \mathrm{card}(C) - \mathrm{card}(B \cap C)$$
$$\mathrm{card}(E - B) = \mathrm{card}(E) - \mathrm{card}(B)$$

<u>Exemple :</u> $B = \{-6, -4, -2, 1, 2, 3\} \subset \mathbb{Z}$

$C = \{-4, 1, 2, 5, 7\} \subset \mathbb{Z}$

$B \cap C = \{-4, 1, 2\}$ $\quad$ $B \cup C = \{-6, -4, -2, 1, 2, 3, 5, 7\}$

Comme $8 = 6 + 5 - 3$, on vérifie bien la formule ci-dessus.

$B \cup C - B \cap C = \{-6, -2, 3, 5, 7\}$

$B - B \cap C = \{-6, 2, 3\}$ $\quad$ $C - B \cap C = \{5, 7\}$

3 Application entre deux ensembles

Définition (application, source, but, image, antécédent)

Soit X et Y deux ensembles. Une application f de X dans Y est un procédé qui à tout élément x de X associe un élément noté $f(x)$ de Y.

1) X est appelé la source de f 2) Y est appelé le but de f

3) Si x est un élément de X, $f(x)$ est appelé l'image de x par f

4) Si y est un élément de Y et que x est un élément de X tel que $f(x) = y$, alors on dit que x est un antécédent de y par f.

$f : X \longrightarrow Y$ se lit f application de source X vers Y.

On notera qu'une application n'est donnée de façon complète que si on s'est donné son ensemble source, son ensemble but et que l'on a explicité le "procédé" f.

Exemple 0 : Soit X l'ensemble des produits d'un commerce donné et $f : X \to \mathbb{R}$ l'application qui a un produit associe son prix en euros. Les antécédent de $17,8$ sont les produits du commerce de prix $17,8$ €. Si a est le paquet de Bonux d'un kg est un produit de notre commerce, $f(a)$ l'image de f par a, est le prix de a.

Exemple 1 : Considérons l'application $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto f(x) = 1-3x$

C'est l'application de source $\mathbb{R}^+$, de but $\mathbb{R}$. Le procédé est celui qui au réel x associe le réel $3-x$.

Quelle est l'image de 3 par f ? C'est $f(3) = 1-(3\times 3) = -8$.

Quels sont les antécédents de -1 par f ? Ceux sont les réels positifs x tels que $f(x) = -1$, soit tels que $1-3x = -1$.

soit $-3x = -2$, soit $3x = 2$, soit $x = \frac{2}{3}$

Donc -1 admet $\frac{2}{3}$ comme seul antécédent par f

Quels sont les antécédents de 3 par f ? Ceux sont les $x \in \mathbb{R}^+$ tels que $f(x) = 3$, soit $1-3x = 3$, soit $-3x = 2$, soit $x = -\frac{2}{3}$. Comme $-\frac{2}{3}$ n'est pas positif (c.a.d n'est pas un élément de $\mathbb{R}^+$), 3 n'a pas d'antécédent par f.

<u>Exemple</u> : $X = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{a,b,c,d,e\}$, f l'application de X vers Y définie par $f(1) = a$, $f(2) = d$, $f(3) = a$, $f(4) = e$.

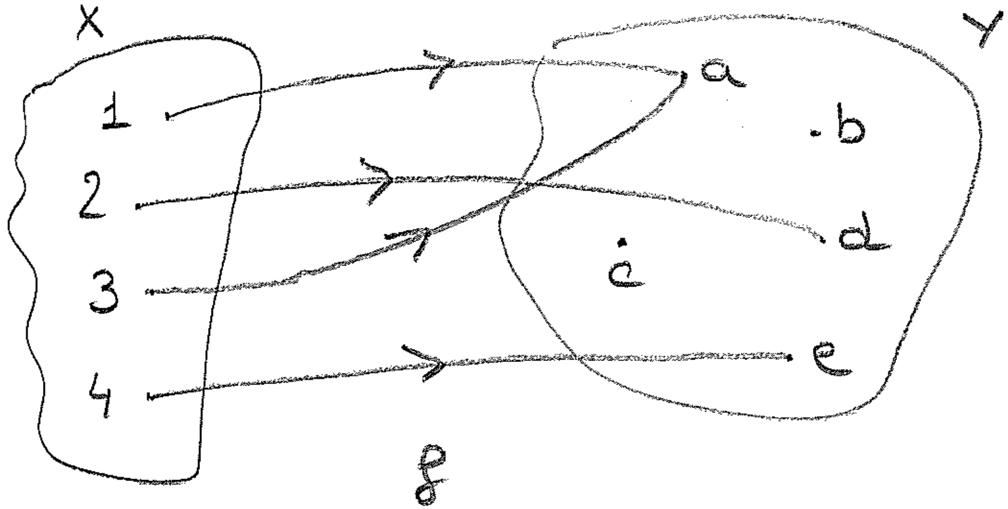


diagramme caractérisant f

L'image de 1 est a, les antécédents de a sont 1 et 3, l'élément c de Y n'a pas d'antécédent, etc ...

Lorsqu'une f est donnée par un tel diagramme, l'image d'un élément x s'obtient en suivant la flèche issue de x et les antécédents de $y \in Y$ en remontant les flèches arrivant en y.

Définition (l'identité) Soit E un ensemble. L'identité de E, notée Id_E est l'application de E vers E qui envoie tout élément de E sur lui même. Autrement écrit :

$$Id_E : E \longrightarrow E \quad , \quad x \longmapsto Id_E(x) = x$$

Définition (composition) : Soit A, B, C trois ensembles, Soit $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ deux applications. La composée de g par f, notée $g \circ f$, est l'application :

$$g \circ f : A \longrightarrow C \quad a \longmapsto g \circ f(a) = g(f(a)) .$$

On observera que la composée de g par f n'est défini que si le but de f est égal à l'ensemble source de g.

Si de plus $C = A$, $f : A \rightarrow B$ $g : B \rightarrow A$, les deux applications $g \circ f : A \rightarrow A$ et $f \circ g : B \rightarrow B$ sont bien définies

Exemple 1 : $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$x \longmapsto f(x) = 1 - 2x$ $\quad$ $x \longmapsto g(x) = x^2 + 2$

L'ensemble but de f est l'ensemble source de g. L'application $g \circ f$ est donc définie, sa source est la source de f, son but le but de g :

$$g \circ f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad x \longmapsto g\circ f(x) = g(f(x)) = g(1-2x)$$
$$= (1-2x)^2 + 2$$
$$= 4x^2 - 4x + 3$$

Autrement écrit $g \circ f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad x \longmapsto g\circ f(x) = 4x^2 - 4x + 3$

Exemple 2 : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ $\quad$ $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = (x+1)^2$ $\quad$ $x \longmapsto -\sqrt{x}$

Les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ sont définies.

$$g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto g\circ f(x) = g((x+1)^2) = -\sqrt{(x+1)^2}$$
$$= -|x+1|$$

$$f \circ g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad x \longmapsto f\circ g(x) = f(-\sqrt{x}) = (-\sqrt{x}+1)^2$$
$$= x + 1 - 2\sqrt{x}$$