Cours L1 11-12 Semestre 1 Cours n° 4
math en économie

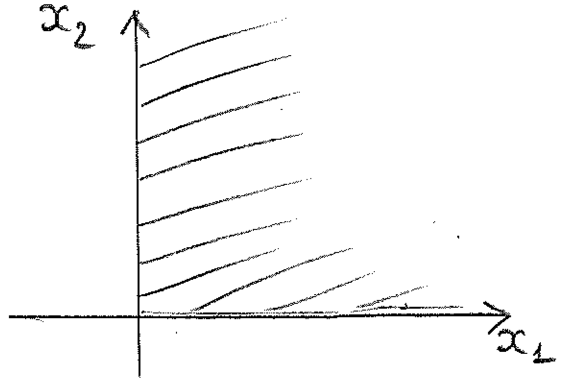
III Fonctions numériques, généralités

1) Définition, exemples :

Par fonction numérique, on entendra dans ce cours une fonction
$f : X \to \mathbb{R}$ $(x_1, .., x_n) \in X \mapsto f(x_1, x_2, .., x_n)$
où X est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

Exemple : $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x_1, x_2) \longmapsto g(x_1, x_2) = \dfrac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}$

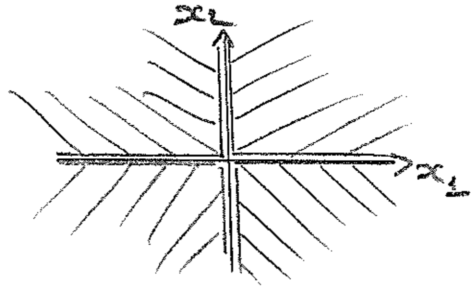
Le domaine de définition de g est $\mathcal{D}_g = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 \geqslant 0$ et $x_2 > 0\}$



Exemple : $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, x_2) \longmapsto h(x_1,x_2) = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2}$

Le domaine de définition de h est $\mathcal{D}_h = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 x_2 \neq 0\}$

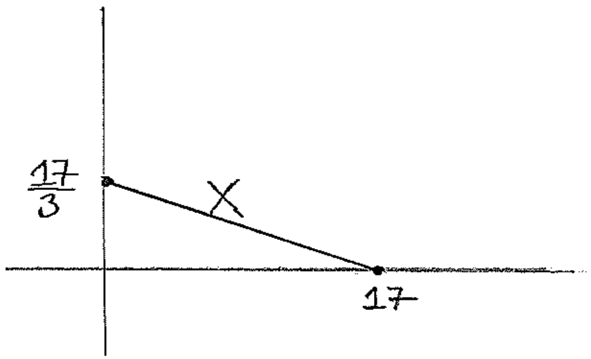
Géométriquement $\mathcal{D}_h$ correspond au complémentaire des axes de coordonnées.



$\mathcal{D}_h$ complémentaire des axes de coordonnées

Exemple : $X = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $q_1 + 3q_2 = 17,\ q_1 \geqslant 0$ et $q_2 \geqslant 0\}$

$f : X \to \mathbb{R}$ $\quad (q_1, q_2) \longmapsto \sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}$



f est défini sur X.

2) Opérations sur les fonctions numériques, exemples

Soient $X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions numériques et $\lambda \in \mathbb{R}$. Associons à ces données différentes fonctions numériques :

somme : $f+g : X \to \mathbb{R} \quad x = (x_1, x_2, .., x_n) \mapsto (f+g)(x_1, .., x_n) = f(x_1, .., x_n) + g(x_1, .., x_n)$

produit par λ : $\lambda f : X \to \mathbb{R} \quad x = (x_1, .., x_n) \mapsto (\lambda f)(x_1, .., x_n) = \lambda\, f(x_1, .., x_n)$

produit : $fg : X \to \mathbb{R} \quad x = (x_1, .., x_n) \mapsto (fg)(x_1, .., x_n) = f(x_1, .., x_n)\, g(x_1, .., x_n)$

quotient : $\dfrac{f}{g} : X \to \mathbb{R} \quad x = (x_1, .., x_n) \longmapsto \dfrac{f}{g}(x_1, .., x_n) = \dfrac{f(x_1, .., x_n)}{g(x_1, .., x_n)}$.

Exemple : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}$

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \mapsto g(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + x_2}$

a) La fonction $f+g$ est :

$$f+g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \mapsto (f+g)(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_1 + x_2}$$

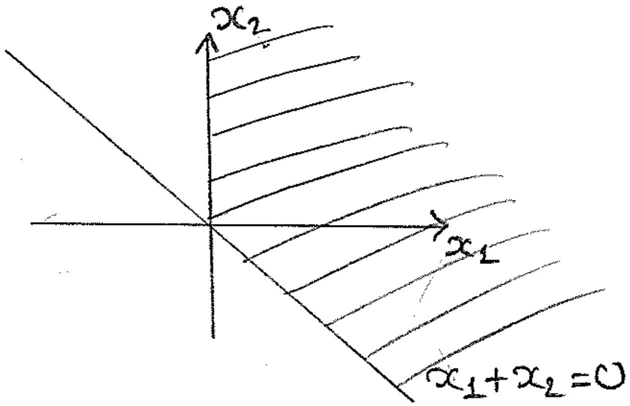
Le domaine de définition de $f+g$ est

$$\mathcal{D}_{f+g} = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x_1 \geqslant 0 \text{ et } x_1 + x_2 \geqslant 0 \}$$

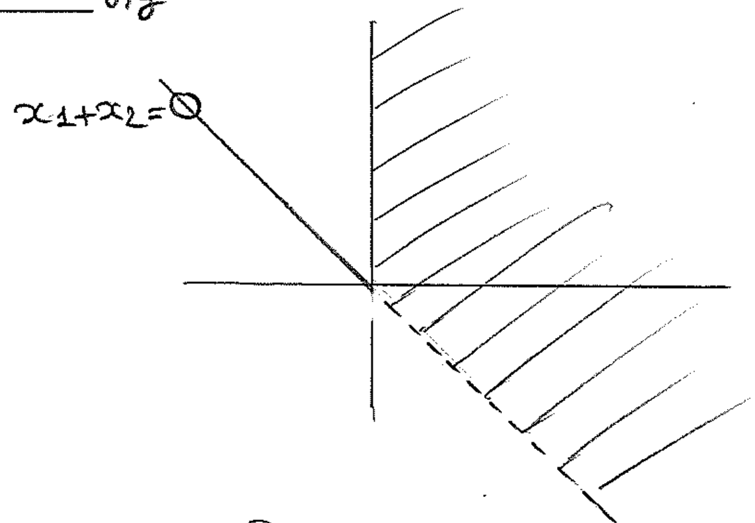
b) Le quotient $\frac{f}{g}$ est la fonction $\frac{f}{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, x_2) \longmapsto \dfrac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1 + x_2}}$

Son domaine de définition est $\mathcal{D}_{\frac{f}{g}} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 \geq 0,\ x_1 + x_2 > 0\}$

<u>représentation géométrique de</u> $\mathcal{D}_{f+g}$ <u>et</u> $\mathcal{D}_{f/g}$:



$\mathcal{D}_{f+g}$ zone hachurée



$\mathcal{D}_{\frac{f}{g}}$ zone hachurée

<u>Définition (fonction polynomiale)</u> Soit n un entier, $i_1, i_2, \ldots, i_n$ des entiers et $a \in \mathbb{R}$. La fonction numérique : $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto a\, x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$ est appelé fonction monomiale de n variables. Une somme finie de telles fonctions numériques est appelée fonction polynomiale de n variables.

<u>Exemples</u> a) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto -5x^3 + 2x - 1/2$ est une fonction polynomiale d'une variable.

b) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{2} x_1^4 x_2^2 - x_1 x_2 + x_1^5 - 7$ est une fonction polynomiale de 2 variables.

c) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto 7 x_1^3 x_2 x_3^4 + \frac{1}{2} x_1^2 x_3 - 8 x_1 x_2 x_3$ est une fonction polynomiale de 2 variables.

d) $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $(x, y, z) \longmapsto \frac{1}{2} x^2 y^3 z^4 - 2xyz^2 + x^3 y - 4$ est une fonction polynomiale de 3 variables.

<u>Remarque</u> : Par convention $x_1^0 x_2^0 \ldots x_n^0 = 1$. Soit $a \in \mathbb{R}$, constante : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto a x_1^0 \ldots x_n^0 = a$ est une fonction monomiale donc polynomiale de n variables

On peut montrer qu'une somme finie de produits finis de fonction polynomiale est une fonction polynomiale

<u>Exemple</u> : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1^2 + x_2^2)^2 + x_3 x_2 + 1$
est une fonction polynomiale 3 variable. Elle coïncide avec la fonction : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^4 + x_2^4 + 2 x_1^2 x_2^2 + x_3 x_2 + 1$.

Les fonctions polynomiales de n variables sont définies sur $\mathbb{R}^n$

<u>Définition (fonction rationnelle)</u> On appelle fonction rationnelle de n variables le quotient de deux fonctions polynomiales

Exemple : $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, x_2) \mapsto R(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2 x_2 + x_1^4 + 2}{x_1^3 x_2 + x_1 x_2}$

est une fonction rationnelle de deux variables. Son domaine de définition est $\mathcal{D}_R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1^3 x_2 + x_1 x_2 \neq 0\}$.

3 Dérivées partielles

Rappel : dérivée d'une fonction numérique d'une variable

Soit $\alpha < \beta$ deux réels et $f :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto f(x)$.

Soit $a \in]\alpha, \beta[$, on dit que f est dérivable de dérivée $f'(a)$ si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

C'est à dire s'il existe un réel $f'(a)$ tel que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est "proche de $f'(a)$ lorsque x est proche de a".

Si f est dérivable pour tout réel x de $]\alpha, \beta[$, f est dite dérivable et $f' :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f'(x)$ est appelée la dérivée de f.

Exemple : On peut montrer que pour tout réel a $\lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = 3a^2$.
Ainsi, la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x^3$ est dérivable de dérivée la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto 3x^2$. On écrira : $(x^3)' = 3x^2$

Lorsqu'elles ont un sens, les formules suivantes sont vérifiées :

$(f+g)' = f' + g'$	$(\lambda f)' = \lambda f'$ où $\lambda \in \mathbb{R}$	$(fg)' = f'g + fg'$
$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - g'f}{g^2}$	$(g \circ f)' = f' \cdot g' \circ f$

Rappelons les dérivées de quelques fonctions usuelles :

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(e^x)' = e^x$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

<u>Exercice :</u> calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + x + 4$ Solution : $f'(x) = x^2 - 4x + 1$

$g : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto g(x) = \frac{2x-4}{x-1}$ Solution : $g'(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto h(x) = e^{(1/4x^2 - 2x + 4)}$ Solution : $h'(x) = (\frac{1}{2}x - 2)e^{\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4}$

$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto u(x) = \ln(x^2+1)$ Solution : $u'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

<u>Definition :</u> Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \Omega$.

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

On dit que f admet en $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ une dérivée partielle par rapport à x_i si la fonction d'une variable :

$$x_i \longrightarrow f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

est dérivable en a_i. Dans ce cas, la dérivée de cette fonction en a_i est notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n)$

Si en tout point de Ω, f admet une dérivée par rapport à x_i, on obtient une fonction

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Cette fonction est appelée la dérivée partielle de f par rapport à x_i

Dans la pratique, pour déterminer $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, on considère f comme fonction de la seule variable x_i et l'on dérive cette fonction.

<u>Exemple :</u> $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \frac{1}{6} x_2 x_1^3 - 3x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{1}{6} x_2 (3x_1^2) - 3(2x_1) x_2^2 + (1) x_2^3 = 2 x_2 x_1^2 - 6 x_1 x_2^2 + x_2^3 .$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{6}(1) x_1^3 - 3x_1^2 (2x_2) + x_1 (3x_2^2) = \frac{1}{6} x_1^3 - 6 x_1^2 x_2 + 3 x_1 x_2^2 .$$

<u>Exemple :</u> $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad (x_1, x_2, u) \longmapsto f(x_1, x_2, u) = x_1^2 x_2 + u(x_1 + x_2) + 2u$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, u) = (2x_1) x_2 + u(1 + 0) + 0 = 2 x_1 x_2 + u$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, u) = x_1^2 (1) + u(0+1) + 0 = x_1^2 + u$$

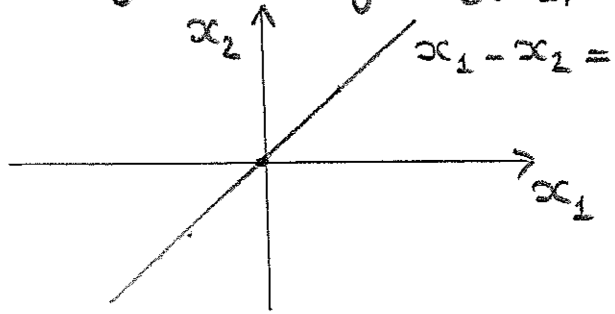
$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_1, x_2, u) = 0 + 1(x_1 + x_2) + 2 \times 1 = x_1 + x_2 + 2 .$$

<u>Exemple :</u> Soit g la fonction rationnelle

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x_1, x_2) \longmapsto g(x_1,x_2) = \frac{2x_1x_2 - 4x_2}{x_1 - x_2}$$

Le domaine de définition de g est $\mathcal{D}_g = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x_1 - x_2 \neq 0\}$

C'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$



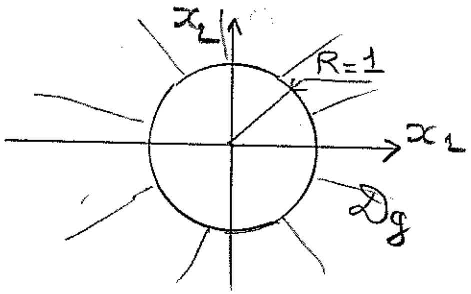
En tout point de $\mathcal{D}_g$, la fonction g admet des dérivées partielles :

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \frac{(x_1 - x_2)(2x_2) - (2x_1x_2 - 4x_2)}{(x_1 - x_2)^2} = \frac{4x_2 - 2x_2^2}{(x_1 - x_2)^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \frac{(x_1 - x_2)(2x_1 - 4) - (2x_1x_2 - 4x_2)(-1)}{(x_1 - x_2)^2} \quad \frac{2x_1^2 - 4x_1}{(x_1 - x_2)^2}$$

Exemple : $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad (x_1, x_2) \longmapsto g(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 1}$

Le domaine de définition de g est $\mathcal{D}_g = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1^2 + x_2^2 - 1 \geqslant 0\}$



$\mathcal{D}_g$ est constitué des points de $\mathbb{R}^2$ à une distance $\geqslant 1$ de l'origine.

En particulier g est défini sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$:

$$\Omega = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x_1^2 + x_2^2 > 0\}$$

Sur cet ouvert g admet des dérivées partielles :

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 1}} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 1}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 1}}$$