IV Etude des fonctions numériques

IV.1 Croissance et décroissance d'une fonction numérique d'une variable

$f :]a,b[\to \mathbb{R}$ Une fonction numérique d'une variable définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$

On dit que f est croissante si elle conserve l'ordre naturel de $\mathbb{R}$

C'est à dire si pour tout $x \leqslant y$: $f(x) \leqslant f(y)$

On dit que f est décroissante si elle renverse l'ordre naturel de $\mathbb{R}$

C'est à dire si pour tout $x \leqslant y$: $f(x) \geqslant f(y)$.

Exemple : La fonction définie à partir du taux de radioactivité d'un élément est une fonction décroissante du temps (hélas elle décroît lentement ...)

<u>Proposition :</u> Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction numérique d'une variable dérivable. On a alors les équivalences

$f' \geqslant 0$ équivaut à f croissante

$f' \leqslant 0$ ——— f décroissante

$f' = 0$ ——— f constante

<u>Remarque :</u> bien noté que $f' \geqslant 0$ signifie : pour tout $t \in]a,b[$ $f'(t) \geqslant 0$ ...

Soit f une fonction numérique d'une variable. Si sur un intervalle, la dérivée de f est positive (resp. negative), alors en restriction à cette intervalle la fonction est croissante (resp. décroissante)

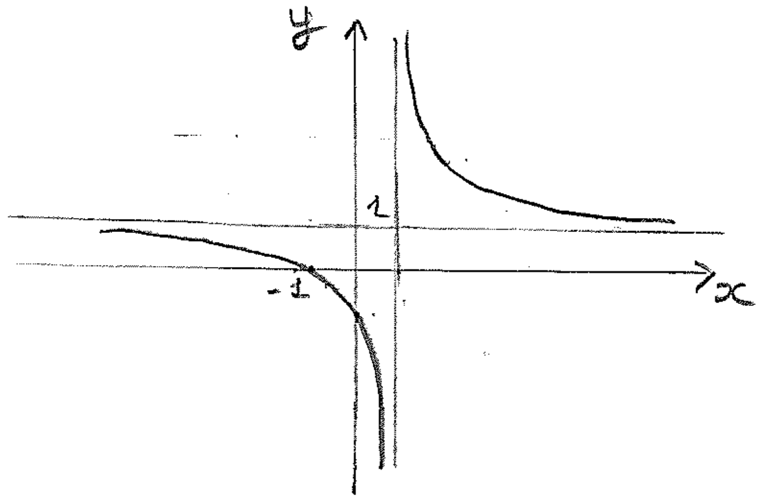
<u>Exemple :</u> $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

f est défini dérivable $\quad f'(x) = \dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

Ainsi, pour tout $x \neq 1$: $\quad f'(x) < 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	
f	1	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	1

On notera que f est bien décroissante sur $]-\infty, 1[$ et $]1, \infty[$ mais pas sur la réunion de ces intervalles



Considérons $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction numérique de n variable. Il n'y a pas d'ordre naturel sur $\mathbb{R}^n$, donc on ne peut naturellement parler de fonction croissante ou décroissante de plusieurs variables. Par contre, on peut parler la croissance ou décroissance d'une fonction partielle obtenue en fixant $n-1$ variables. Ces fonctions partielles sont en effet des fonctions d'une variable

<u>Proposition</u> : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction numérique de n variables. Soit $i \in \{1, 2, .., n\}$, on suppose que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe sur U.

Alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, .., x_n) \geqslant 0$ pour tout $(x_1, x_2, .., x_n) \in U$ équivaut à la croissance de la fonction numérique de la variable x_i déduite de f en fixant les autres variables : $x_i \mapsto f(x_1, .., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, .. x_n)$.

Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ... x_n) \leqslant 0$ pour tout $(x_1, .., x_n) \in U$ équivaut à la décroissance de cette même fonction de la variable x_i déduit de f en fixant les autres variables.

Exemple : p_1 désigne le prix du produit 1
p_2 ————— 2
r le budget du consommateur

Soit $U = \{ (p_1, p_2, r) \in \mathbb{R}^3$ tels que $p_1 > 0, p_2 > 0, r > 0 \}$
Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction numérique de trois variables définie par $f(p_1, p_2, r) = \dfrac{p_2 r}{p_1 \, (p_1 + p_2)}$. Cette fonction modélise par exemple la demande pour les prix p_1, p_2 et le budget r.

On remarque U est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ comme intersection de trois ouverts : $U_1 = \{(p_1, p_2, r) \in \mathbb{R}^3$ tels que $p_1 > 0\}$,
$U_2 = \{(p_1, p_2, r) \in \mathbb{R}^3$ tels que $p_2 > 0\}$, $U_3 = \{(p_1, p_2, r)$ tels que $r > 0\}$
(voir proposition du chapitre III. 4)

$$\frac{\partial f}{\partial p_1}(p_1, p_2, r) = -\frac{p_2 r \,(2p_1 + p_2)}{p_1^2 \, (p_1 + p_2)^2} < 0 \quad \text{pour } (p_1, p_2, r) \in U$$

Ainsi à p_2 et r fixé, la demande est une fonction décroissante de p_1.

IV.2 Point critique, extremum d'une fonction numérique

Rappels : Soit $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$
une fonction dérivable d'une variable. Supposons que f atteint en $c \in]a,b[$ un maximum, c.a.d supposons que pour tout $x \in]a,b[$: $f(x) \leqslant f(c)$, alors $f'(c) = 0$.
Même conclusion si f atteint en $c \in]a,b[$ un minimum.

Exemple : $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto f(x) = x^2$
f admet clairement un minimum en 0 puisque pour tout $x \in]-1,1[$: $f(x) = x^2 \geqslant 0 = f(0)$.
La fonction f est dérivable, $f'(x) = 2x$. On constate bien que $f'(0) = 0$

Si on remplace $]a,b[$ par $[a,b]$ ce résultat est faux. Considérons par exemple : $g : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto g(x) = x^2$

La fonction g admet en $x=1$ un maximum, mais $g'(1)=0$.

<u>Définition :</u> Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $f : A \to \mathbb{R}$ $(x_1,..,x_n) \mapsto f(x_1,..,x_n)$.

On dit que f admet un <u>maximum en a</u> $=(a_1,..,a_n) \in A$ si pour tout $(x_1,..,x_n) \in A$: $f(x_1,...,x_n) \leqslant f(a_1,..,a_n)$.

On dit que f admet un <u>minimum en a</u> $=(a_1,..,a_n) \in A$ si pour tout $(x_1,..,x_n) \in A$: $f(a_1,...,a_n) \leqslant f(x_1,..,x_n)$

On dit que f admet un <u>maximum local en a</u> $=(a_1,..,a_n) \in A$ si il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $(x_1,..,x_n) \in B(a,\varepsilon) \cap A$

$$f(x_1,...,x_n) \leqslant f(a_1,..,a_n)$$

(C'est à dire au voisinage de $(a_1,..,a_n)$: $f(x_1,..,x_n) \leqslant f(a_1,..,a_n)$)

On dit que f admet un <u>minimum local en a</u> $=(a_1,..,a_n) \in A$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $(x_1,..,x_n) \in B(a,\varepsilon) \cap A$

$$f(x_1,...,x_n) \geqslant f(a_1,..,a_n)$$

(C'est à dire au voisinage de $(a_1,..,a_n)$: $f(x_1,..,x_n) \geqslant f(a_1,..,a_n)$).

On dira extremum pour maximum ou minimum

Définition : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$
On suppose que f admet des dérivées partielles sur U. On appelle point critique de f, un $x = (x_1, .., x_n) \in U$ tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, .., x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, .., x_n) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, .., x_n) = 0$$

Exercice : Trouver les points critiques de la fonction
$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1 x_2 - 5x_1 - 6x_2$

La fonction f est polynomiale, donc admet des dérivées partielles par rapport à x_1 et x_2

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 - 5 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 4x_2 + x_1 - 6$$

Ainsi (x_1, x_2) est un point critique de f, si et seulement si (x_1, x_2) est solution du système

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 6 = 0 \end{cases}$$

D'où $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ 2x_1 + 8x_2 = 12 \end{cases}$ soit $7x_2 = 7$ et $x_2 = 1$

On en déduit $2x_1 = 4$ et $x_1 = 2$. Ainsi f admet le couple $(1,2)$ comme unique point critique.

Proposition : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$.
On suppose que f admet sur U des dérivées partielles d'ordre 1.
Si f admet en $c = (c_1, c_2, .., c_n) \in U$ un extremum local :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, .., c_n) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(c_1, .., c_n) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(c_1, c_2, .., c_n) = 0$$

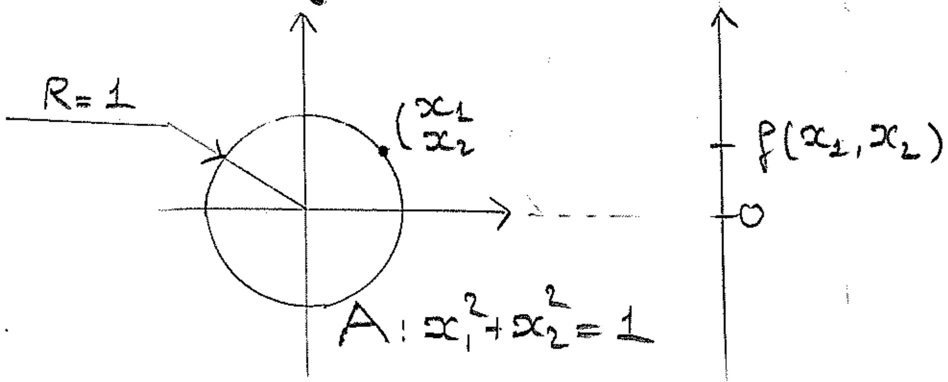
Autrement dit
f admet un extremum local en c $\Rightarrow$ $\begin{cases} c = (c_1, c_2, .., c_n) \text{ est un} \\ \text{point critique de } f \end{cases}$

IV.3 Fonction numérique continue sur un fermé, borné de $\mathbb{R}^n$

Théorème : Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction numérique continue. Alors, il existe $a = (a_1, a_2, .., a_n) \in A$ tel que f admet en a un maximum : pour tout $(x_1, .., x_n) \in A$: $f(x_1, .., x_n) \leq f(a_1, .., a_n)$.
Et il existe $b = (b_1, b_2, .., b_n) \in A$ tel que f admet en b un minimum : pour tout $(x_1, .., x_n) \in A$: $f(b_1, .., b_n) \leq f(x_1, .., x_n)$.

Exemple : $A = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x_1^2 + x_2^2 = 1 \}$

$f : A \to \mathbb{R} \qquad (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2) = x_2$



A est le cercle de centre $(0,0)$ de rayon 1

L'ensemble A est un ensemble borné de $\mathbb{R}^2$ car contenu dans une boule par exemple $B((0,0);2) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 ; x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$

L'application $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ $\quad (x_1,x_2) \mapsto g(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$ car polynomiale. Nous savons alors que pour tout $c \in \mathbb{R}$

$$\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } g(x_1,x_2) = c\}$$

est un ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$. En particulier pour $c = 1$, nous obtenons que A est un ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$

L'application $f : A \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1,x_2) \mapsto x_2$ est continue. C'est la restriction à A de l'application polynomiale $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x_1,x_2) = x_2$. L'application h est continue, donc f sa restriction à A est continue.

Le théorème nous dit il existe $(a_1,a_2) \in A$ tel que f admet en (a_1,a_2) un maximum. On constate que $(0,1)$ convient.
Le théorème nous dit il existe $(b_1,b_2) \in A$ tel que f admet en (b_1,b_2) un minimum. On constate que $(0,-1)$ convient.

IV 4 Dérivées partielles d'ordre ≥ 2

<u>Rappels</u> : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto f(x)$ fonction numérique d'une variable. On suppose f dérivable. On dit que f admet une dérivée seconde si f' est dérivable, on note f'' la dérivée de f' appelée aussi dérivée seconde de f. Si f'' est dérivable, on note f''' la dérivée f'' appelée aussi dérivée troisième de f ou dérivée d'ordre 3. Etc...

<u>Exemple</u> : $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{x}$

f admet sur $\mathbb{R}^*$ une dérivée de tout ordre :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = +\frac{2}{x^3}, \quad f'''(x) = -\frac{6}{x^4}, \ \ldots$$

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, .., x_n) \mapsto f(x_1, x_2, .., x_n)$ une fonction numérique de n variables. On suppose que f admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}, .., \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sur U

<u>Définition :</u> Pour $i \neq j$, si elle existe on note

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ la dérivée par rapport à x_j de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$

On note

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ la dérivée par rapport à x_i de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$

Ces dérivées s'appellent des dérivées partielles d'ordre 2

<u>Remarque :</u> On peut continuer en appelant dérivée partielle d'ordre 3

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)$$

Etc...

Exemple : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1,x_2) = \frac{1}{2} x_2 x_1^3 - 2x_1^2 x_2 + x_1 x_2$

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \frac{3}{2} x_2 x_1^2 - 4x_1 x_2 + x_2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2} x_1^3 - 2x_1^2 + x_1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) = 3x_2 x_1 - 4x_2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) = \frac{3}{2} x_1^2 - 4x_1 + 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,x_2) = \frac{3}{2} x_1^2 - 4x_1 + 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) = 0$$

Proposition : Une fonction polynomiale de plusieurs variables admet des dérivées partielles de tout ordre. Ces dérivées partielles sont encore des fonctions polynomiales

Une fonction rationnelle de plusieurs variables admet des dérivées partielles de tout ordre sur son domaine de définition (qui est un ouvert). Ces dérivées partielles sont des fonctions rationnelles définies sur le même ouvert.

Proposition (Identité de Schwarz) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$

$f : U \to \mathbb{R}$ $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

On suppose que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues sur U

Alors pour tout $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Remarque : L'identité de Schwarz est vérifiée donc en particulier pour les fonctions polynomiales ou rationnelles.

Exemple : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$

1) Montrer que f est définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ que l'on précisera

2) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f et constater l'identité de Schwartz

<u>Réponse</u> : $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 + x_2 \neq 0\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{2x_2}{(x_1+x_2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{-2x_1}{(x_1+x_2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = \frac{-4x_2}{(x_1+x_2)^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{2(x_1 - x_2)}{(x_1+x_2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{2(x_1 - x_2)}{(x_1+x_2)^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = \frac{4x_1}{(x_1+x_2)^3}$$

On constate que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$.

<u>Example</u> : $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \longmapsto g(x_1, x_2) = \dfrac{2x_1x_2 - 1}{x_1 - x_2}$

1) Montrer que g est définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ que l'on précisera

2) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de g sur U

<u>Réponse</u> : $U = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 - x_2 \neq 0 \}$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{-2x_2^2 + 1}{(x_1 - x_2)^2} \qquad \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{2x_1^2 - 1}{(x_1 - x_2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = \frac{-2(-2x_2^2 + 1)}{(x_1 - x_2)^3} \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{-4x_1x_2 + 2}{(x_1 - x_2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{-4x_1x_2 + 2}{(x_1 - x_2)^3} \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = \frac{2(2x_1^2 - 1)}{(x_1 - x_2)^3}$$