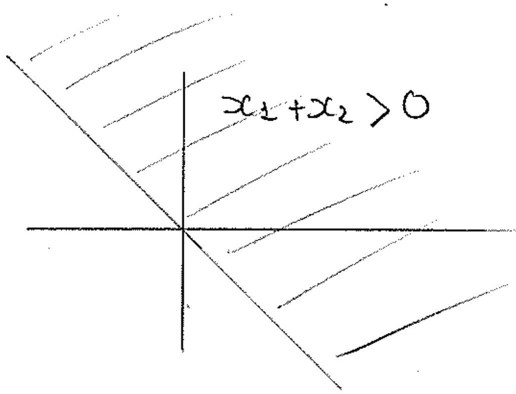
IV 9 Fonctions homogènes

<u>Définition</u> : Un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est appelé cône positif de $\mathbb{R}^n$ si pour tout $(x_1, x_2, .., x_n) \in C$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$: $(\lambda x_1, \lambda x_2, .., \lambda x_n) \in C$

<u>Exemple</u> : $C = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 + x_2 > 0\}$ est un cone positif de $\mathbb{R}^2$



En effet, soit $(x_1, x_2) \in C$ et $\lambda > 0$.
Considérons le couple de réel $(\lambda x_1, \lambda x_2)$
On a $\lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda (x_1 + x_2)$ car $x_1 + x_2 > 0$
D'où $\lambda x_1 + \lambda x_2 > 0$ et $(\lambda x_1, \lambda x_2) \in C$

<u>Définition</u> : Soit C un cone positif de $\mathbb{R}^n$, k un réel et

$f : C \to \mathbb{R} \qquad (x_1, .., x_n) \mapsto f(x_1, x_2, .., x_n)$

Une fonction f est dite homogène de degré k si pour tout $(x_1, x_2, .., x_n) \in C$ et $\lambda > 0$:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, .., \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, .., x_n)$$

<u>rappels</u> : $\lambda^{-k} = \frac{1}{\lambda^k}$

Exemple : $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \mapsto g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$

Montrer que g est homogène de degré 2

En effet, $\mathbb{R}^2$ est bien un cône positif. Et si $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda > 0$

$$g(\lambda x_1, \lambda x_2) = (\lambda x_1)^2 + (\lambda x_1)(\lambda x_2) + (\lambda x_2)^2 = \lambda^2 (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)$$
$$= \lambda^2 g(x_1, x_2)$$

D'où le résultat

Exemple : $h : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \quad (x_1, x_2) \mapsto h(x_1, x_2) = \dfrac{1}{\sqrt{x_1^4 + x_2^4}}$

Montrer que h est une fonction homogène, préciser son degré d'homogénéité

Si $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $\lambda > 0$: Alors $(\lambda x_1, \lambda x_2) \neq (0,0)$ sinon $(x_1, x_2) = (0,0)$ impossible ! Donc $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ est un cône positif

Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - \{0,0\}$ et $\lambda > 0$

$$h(\lambda x_1, \lambda x_2) = \frac{1}{\sqrt{(\lambda x_1)^4 + (\lambda x_2)^4}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^4 (x_1^4 + x_2^4)}} = \frac{1}{\lambda^2 \sqrt{x_1^4 + x_2^4}} = \lambda^{-2} h(x_1, x_2)$$

Donc h est homogène de degré -2.

On rappelle que $\lambda^{-k} = \frac{1}{\lambda^k}$.

<u>Proposition (Identité d'Euler) :</u> Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un cone positif, ouvert.
Soit $f : C \to \mathbb{R}$ $(x_1, .., x_n) \mapsto f(x_1, x_2, .., x_n)$ admettant des dérivées partielles continues, alors :

f homogène de degré k équivaut à $*$

$$* \left| \begin{array}{l} \forall (x_1, x_2, .., x_n) \in C \\ x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, .., x_n) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, .., x_n) + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, .., x_n) \\ \qquad = k\, f(x_1, x_2, .., x_n) \end{array} \right.$$

<u>Exercice :</u> $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$

1) Montrer que f admet des dérivées partielles continues
2) Montrer à partir de la définition que f est homogène et préciser son degré d'homogénéité
3) Calculer les dérivées partielles de f
4) Vérifier alors l'identité d'Euler

<u>Solution</u> : 1) On remarque que $x_1^2+x_2^2=0$ équivaut à $x_1=x_2=0$ car la somme de deux nombres positifs est nulle si chacun de ces nombres est nul. Ainsi, $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ est bien le domaine de définition de f. Or une fonction rationnelle admet des dérivées partielles continues de tout ordre sur son ensemble de définition.

2) On a vu dans un exemple précédent que $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ est un cône positif.
Soit $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ et $\lambda>0$:

$$f(\lambda x_1,\lambda x_2)=\frac{(\lambda x_1)^2+(\lambda x_1)(\lambda x_2)+(\lambda x_2)^2}{(\lambda x_1)^2+(\lambda x_2)^2}=\frac{\lambda^2(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)}{\lambda^2(x_1^2+x_2^2)}=\frac{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}{x_1^2+x_2^2}$$

D'où $f(\lambda x_1,\lambda x_2)=f(x_1,x_2)=\lambda^0 f(x_1,x_2)$ avec la convention $\lambda^0=1$
Donc f est homogène de degré zéro.

3) $$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)=\frac{(x_1^2+x_2^2)(2x_1+x_2)-(2x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}=\frac{x_2(x_1^2+x_2^2)-2x_1^2x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}$$

$$=\frac{x_2(x_2^2-x_1^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)=\frac{x_1(x_1^2-x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}$$ m. calcul

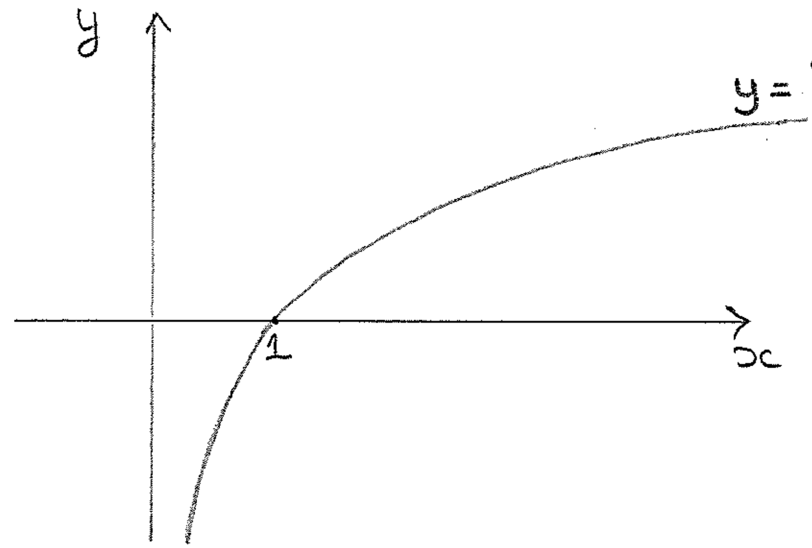
4) $$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)=\frac{x_1x_2(x_2^2-x_1^2)+x_2x_1(x_1^2-x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}=0$$

$$=0\cdot f(x_1,x_2)$$

V Quelques fonctions utiles en économie

V.1 Fonction logarithme

Il existe une fonction appelée logarithme népérien, notée $\ln$, qui a les propriétés suivantes :



$\ln : \mathbb{R}^+ - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \mapsto \ln(x)$

$\ln(1) = 0$ $\qquad$ $\ln$ est croissante $\nearrow$

$\ln$ est dérivable $\qquad \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

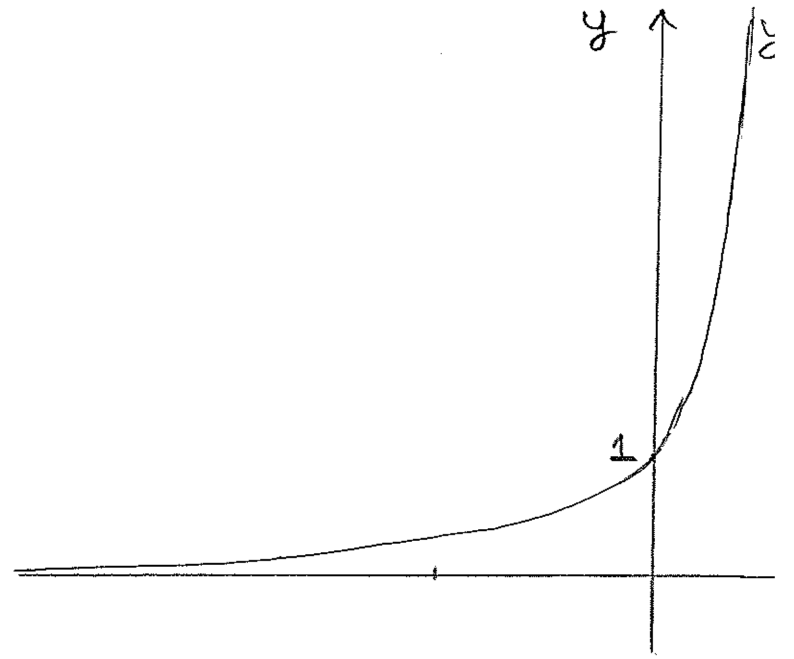
$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

$\ln x > 0 \iff x > 1$ $\qquad\qquad$ $\ln x < 0 \iff x \in \,]0,1[$

Pour tout $x, y > 0$: $\qquad \ln(xy) = \ln x + \ln y$

IV.2 Fonction exponentielle

Il existe une fonction appelée exponentielle, notée e, qui a les propriétés suivantes :



$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ - \{0\} \qquad x \mapsto e^x$

$e^0 = 1$

e est une fonction croissante

e est dérivable $(e')(x) = e^x$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad e^{x+y} = e^x e^y$

Lien entre exponentielle et logarithme népérien

Pour tout x réel
$\ln(e^x) = x$

Pour tout $x > 0$
$e^{\ln x} = x$

Les fonctions exponentielle et ln sont bijectives et inverses l'une de l'au

V 3 Fonction puissance

Soit x un réel, on convient de noter $x^0 = 1$. Pour $n > 0$ entier, x^n est le produit n-fois de x par lui même. Pour $n > 0$ et $x \neq 0$, on convient que $x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$.

<u>Définition</u> : Soit $x > 0$; p et q deux entiers. On désigne par $x^{p/q}$ l'unique réel positif y tel que $y^q = x^p$

On note $\sqrt{x} = x^{1/2}$ $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$. On remarque que $x^{p/q} = e^{p/q \ln x}$

<u>Définition</u> : Soit $x > 0$ et a un réel. On désigne par x^a le réel positif : $e^{a \ln x}$

<u>Propriétés de la fonction x^a</u> : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x^a = e^{a \ln x}$

Elle est dérivable : $(x^a)' = a x^{a-1}$

$a > 0$

	0		∞
ax^{a-1}		$+$	
x^a	0	$\nearrow$	$+\infty$

$a < 0$

	0		∞
ax^{a-1}		$-$	
x^a	$+\infty$	$\searrow$	0

Pour tout $x, y > 0$: $\quad x^{a+b} = x^a x^b$, $(x^a)^b = x^{ab}$, $(xy)^a = x^a y^a$

<u>Exemple d'une fonction de Cobb-Douglas :</u>

$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 > 0$ et $x_2 > 0\}$

Soit α, β deux réels strictement positif. On considère la fonction

$f : U \to \mathbb{R} \qquad (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2) = 17\, x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$

appelée fonction de Cobb-Douglas.

Les fonctions puissances étant dérivable, f admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 17\,\alpha\, x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 17\,\beta\, x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1}$$

U est un cône positif ouvert et pour tout $\lambda > 0$

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = 17 (\lambda x_1)^\alpha (\lambda x_2)^\beta = 17 \lambda^\alpha \lambda^\beta x_1^\alpha x_2^\beta = \lambda^{\alpha+\beta} 17 x_1^\alpha x_2^\beta$$
$$= \lambda^{\alpha+\beta} f(x_1, x_2)$$

Ainsi, f est homogène de degré d'homogénéité : $\alpha+\beta$.

On constate bien que l'identité d'Euler est vérifiée :

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 17\alpha\, x_1\, x_1^{\alpha-1} x_2^\beta + 17\beta\, x_1^\alpha\, x_2 x_2^{\beta-1}$$
$$= 17\,\alpha\, x_1^\alpha x_2^\beta + 17\,\beta\, x_1^\alpha x_2^\beta$$
$$= (\alpha+\beta)(17 x_1^\alpha x_2^\beta) = (\alpha+\beta)\, f(x_1, x_2).$$