cours 10

VI Graphe, convexe, lignes de niveaux

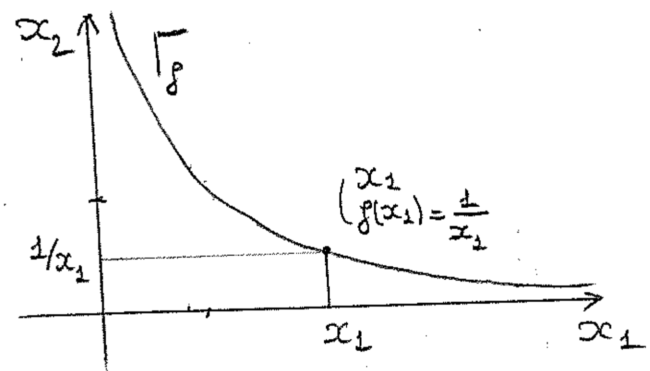
VI.1 Graphe :

__Définition (graphe d'une fonction)__ : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $x_1 \longmapsto x_2 = f(x_1)$. On appelle graphe de la fonction f le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, noté Γ_f et défini par :

$$\Gamma_f = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x_1 \in I \text{ et } x_2 = f(x_1) \} \subset \mathbb{R}^2$$

__Exemple :__ $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad x_1 \longmapsto x_2 = f(x_1) = \dfrac{1}{x_1}$

	0	$+\infty$
$f'(x_1)$	$-$	
$f(x_1)$	$+\infty$ $\searrow$	0

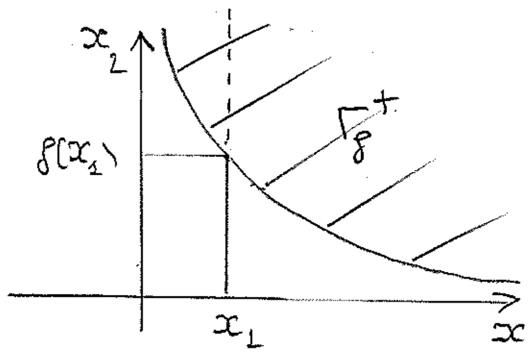


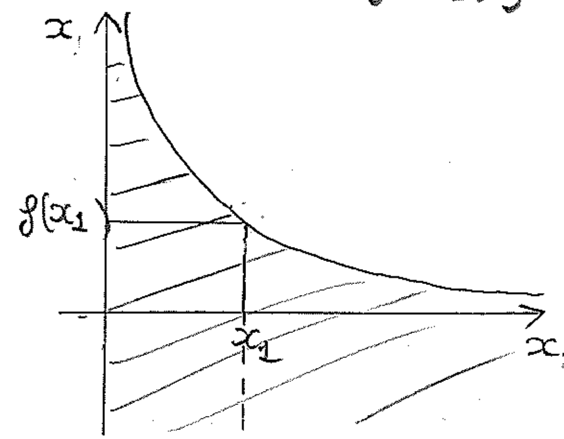
On peut distinguer l'ensemble des points situés au-dessus du graphe d'une fonction numérique d'une variable

$\Gamma_f^+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 \in I$ et $x_2 \geqslant f(x_1)\} \subset \mathbb{R}^2$

et l'ensemble des points situés au dessous du graphe de f

$\Gamma_f^- = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 \in I$ et $x_2 \leqslant f(x_1)\} \subset \mathbb{R}^2$

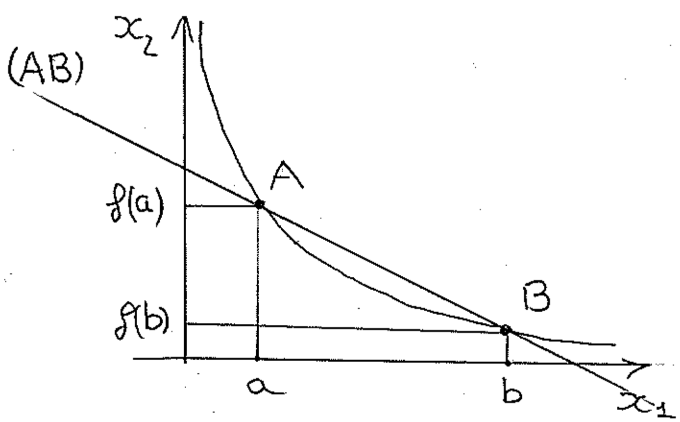




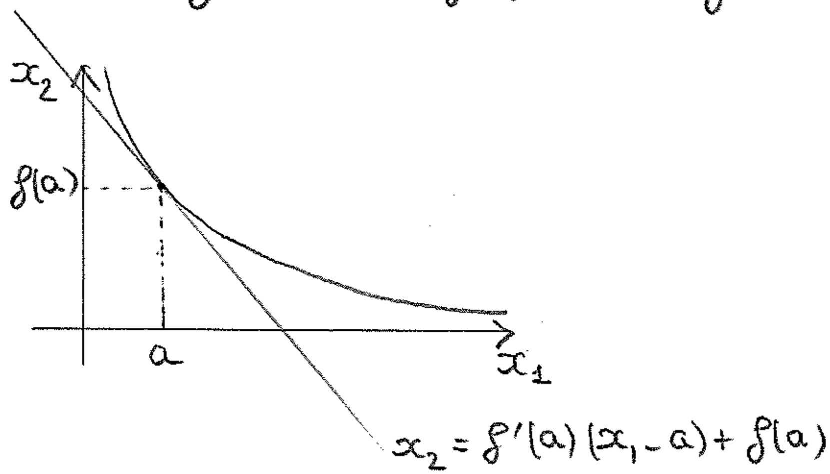
Soit $a, b \in I$ et $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b)) \in \Gamma_f$

La droite (AB) s'appelle sécante au graphe de f. La droite AB a pour équation

$$x_2 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_1 - a) + f(a)$$



Quand B tend vers A, la droite (AB) tend si f est dérivable vers une droite appelée la tangente en A au graphe de f. L'équation de la tangente au graphe de f en A est



$$x_2 = f'(a)(x_1 - a) + f(a)$$

c'est encore la droite de pente $f'(a)$ passant par $A = (a, f(a))$

<u>Définition (sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ situé du même coté du graphe de f)</u>

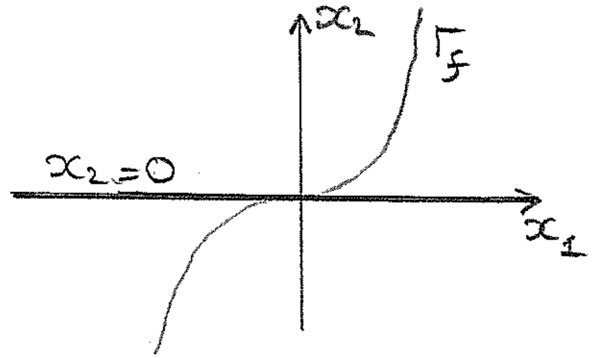
On dira qu'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ est situé du même coté du graphe de f si soit il est contenu dans Γ_f^+, soit il est contenu dans Γ_f^-

<u>Proposition</u> : $f : I \to \mathbb{R}$ $\quad x_1 \mapsto x_2 = f(x_1)$ dérivable en a $\quad A = (a, f(a))$

Si une droite passant par $A = (a, f(a))$ est située du même coté du graphe de f, c'est que cette droite est la tangente en A au graphe de f. Sa pente est donc $f'(a)$.

La réciproque est fausse : $x_2 = 0$ est l'équation de la tangente à l'origine au graphe de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x_1 \mapsto x_2 = f(x_1) = x_1^3$

	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



La droite "$x_2 = 0$" n'est pas du mê[me] coté du graphe

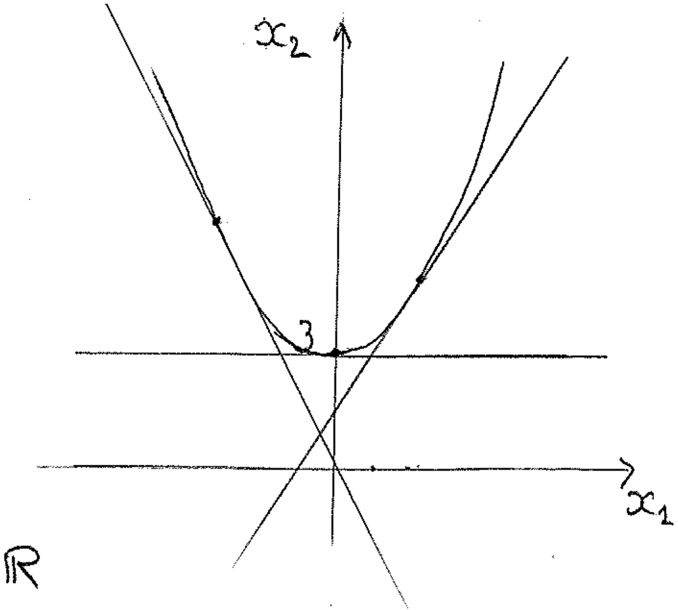
<u>Proposition :</u> $f : I \to \mathbb{R}$ $\quad I$ intervalle. On suppose que f est deux fois dérivables. On a alors

$\forall x \in I \quad f''(x) \geqslant 0 \quad \Longrightarrow$ | La tangente en tout point du graphe de f est au-dessous du graphe de f

$\forall x \in I \quad f''(x) \leqslant 0 \quad \Longrightarrow$ | La tangente en tout point du graphe de f est au-dessus du graphe de f

Exemple : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1) = \frac{1}{2} x_1^2 + 3$

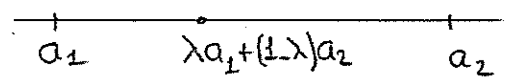
$f'(x_1) = x_1$, $f''(x_1) = 2 \geqslant 0$ pour tout x_1.



Proposition : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions numériques d'une variable définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose f et g dérivable en a et $f(a) = g(a)$. Si le graphe de f est situé du même coté que le graphe de g, alors le graphe de f et le graphe de g ont même tangente en $(a, f(a))$.

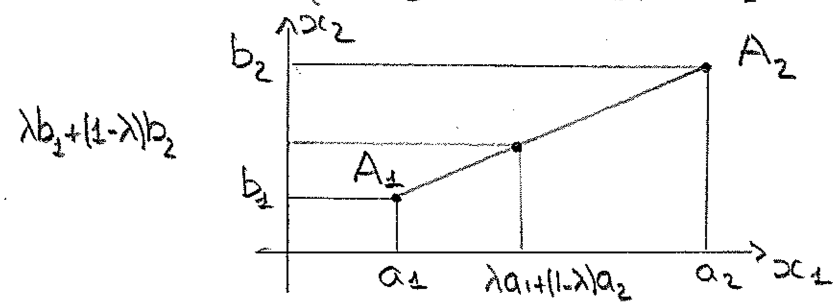
VI.2 Convexes, Fonctions convexes

Soit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, quand λ réel décrit l'intervalle $[0,1]$: $\lambda a_1 + (1-\lambda) a_2$ décrit l'intervalle $[a_1, a_2]$



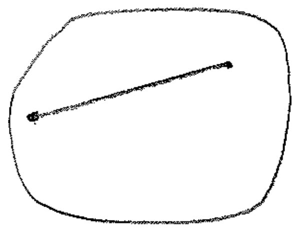
$\lambda \in [0,1]$

Soit (a_1, b_1), (a_2, b_2) deux couples de réels. Identifions $\mathbb{R}^2$ et un plan à l'aide d'un repère de ce plan. Soit A_1 le point de coordonnées (a_1, b_1) et A_2 le point de coordonnée (a_2, b_2). Quand λ décrit l'intervalle $[0,1]$, le point de coordonnées $(\lambda a_1 + (1-\lambda) a_2, \lambda b_1 + (1-\lambda) b_2)$ décrit l'intervalle $A_1 A$

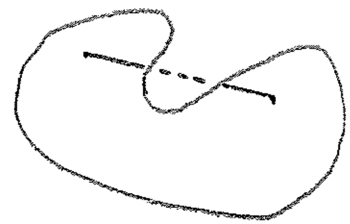


Définition (Ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$) Un sous-ensemble X de $\mathbb{R}^n$ est dit convexe si dès qu'il contient $(a_1, a_2, .., a_n)$ et $(b_1, b_2, .., b_n)$, il contient pour tout $\lambda \in [0,1]$: $(\lambda a_1 + (1-\lambda) b_1, \lambda a_2 + (1-\lambda) b_2, \dots, \lambda a_n + (1-\lambda) b_n)$

En dimension 2, 3, un ensemble est donc convexe si dès qu'il contient deux points, il contient le segment joignant ces deux points



ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$



ensemble non convexe de $\mathbb{R}^2$

Remarque : On peut noter que $X \subset \mathbb{R}^n$ est convexe, si pour tout $(a_1, a_2, \dots$ et $(b_1, b_2 .., b_n) \in X$, pour tout $\lambda > 0$, $\mu > 0$:

$$\left(\frac{\lambda a_1 + \mu b_1}{\lambda + \mu}, \frac{\lambda a_2 + \mu b_2}{\lambda + \mu}, \dots, \frac{\lambda a_n + \mu b_n}{\lambda + \mu} \right) \in X$$

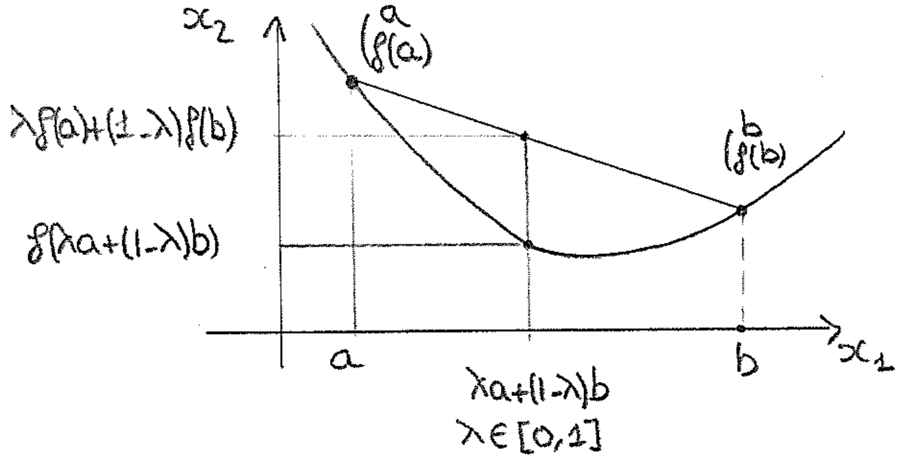
Le scalaire $\dfrac{\lambda a_i + \mu b_i}{\lambda + \mu}$ est appelé moyenne de a_i et b_i relativement aux poids (λ, μ)

__Définition (fonction convexe, fonction concave)__ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On une fonction est dite convexe (respectivement concave) si l'une des propriétés suivantes est vérifiée

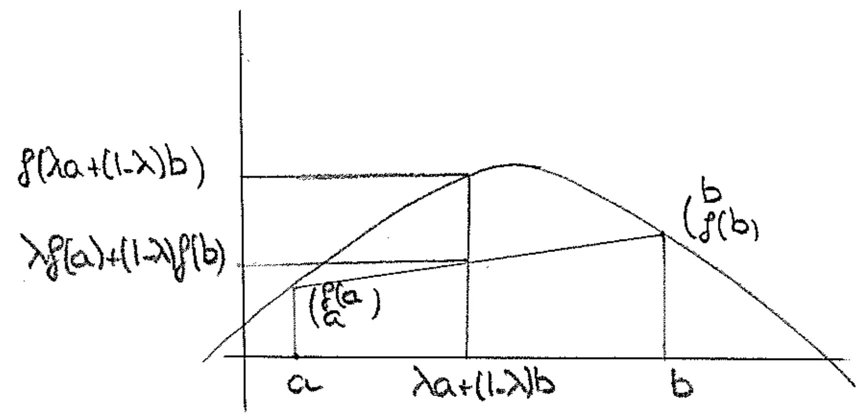
1) La partie située au-dessus (respectivement au-dessous) du graphe de f est convexe

2) Pour tout $a, b \in I$, pour tout $\lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda a + (1-\lambda) b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) \qquad (\text{respectivement } \geqslant)$$

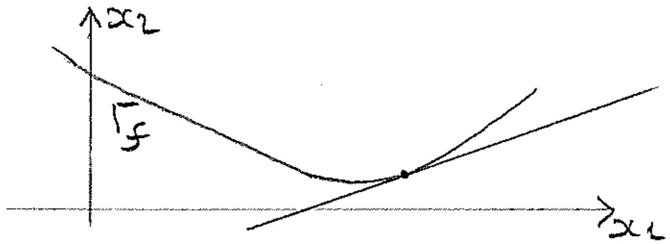


f convexe

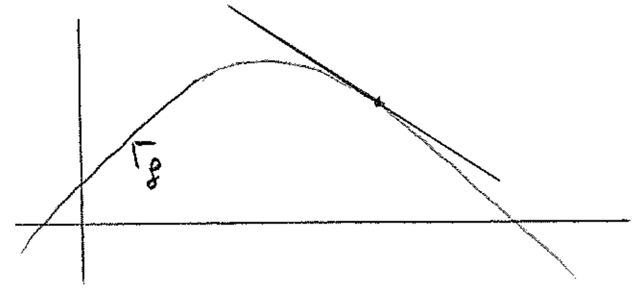


f concave

Proposition : f convexe (respectivement) concave et dérivable, alors les tang
au graphe de f sont au-dessous (respectivement au-dessus) du graphe d



fonction convexe



fonction concave

Proposition : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose f deux fois dérivables alors

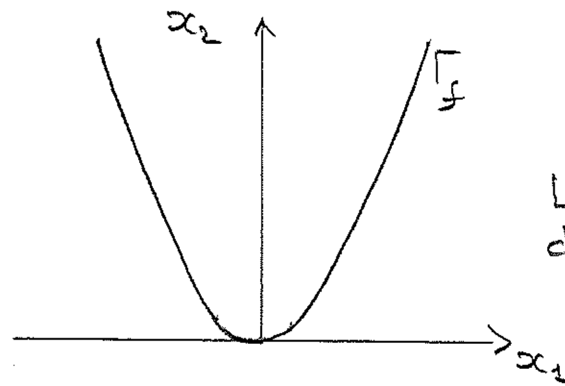
f convexe équivaut à pour tout $x \in I$: $f''(x) \geq 0$

f concave équivaut à pour tout $x \in I$: $f''(x) \leq 0$

Exemple : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x_1 \mapsto f(x_1) = x_1^2$

$f''(x) = 2 \geq 0$ pour tout x réel

f est donc convexe



Γ_f est une
parabole
La partie au.
de la parabole
convexe

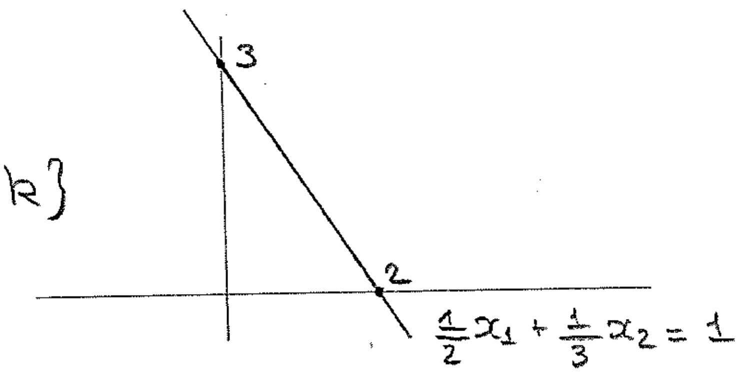
VI 3 Lignes de niveau

Soit X un ensemble, $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction numérique. Soit $k \in \mathbb{R}$, $X_k = \{x \in X$ tels que $f(x) = k\}$ est appelé ligne de niveau de f.

Exemple 1 : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{3} x_2$

Représenter $X_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x_1, x_2) = 1\}$.

Que dire des lignes de niveau de f ?



Soit $k \in \mathbb{R}$

$X_k = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = k\}$

est une ligne de niveau de f

Les lignes de niveau de f sont des droites parallèles.

b) Soit $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 + x_2 \neq 0\}$

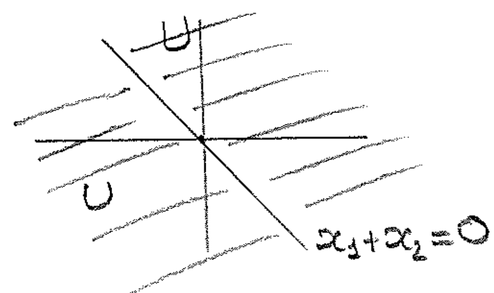
$f : U \to \mathbb{R} \qquad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \dfrac{2x_1 + 3x_2 - 1}{x_1 + x_2}$

Montrer que U est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$. Représenter U.

Représenter la ligne de niveau

$$X_1 = \{ (x_1, x_2) \in U \text{ tels que } f(x_1, x_2) = 1 \}$$

<u>réponse</u> : La fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \longrightarrow x_1 + x_2$ est polynomiale, donc continue. Ainsi $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 + x_2 \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$



U complémentaire de la droite "$x_1 + x_2 = 0$"

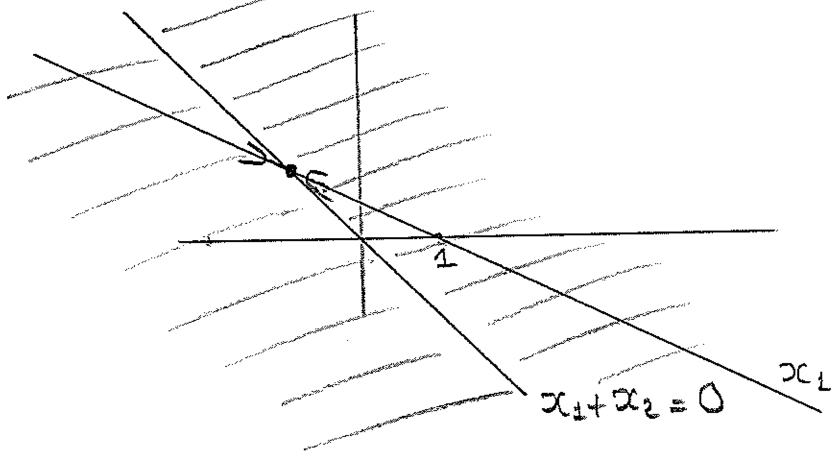
X_1 est l'ensemble des $(x_1, x_2) \in U$ tels que $\dfrac{2x_1 + 3x_2 - 1}{x_1 + x_2} = 1$

donc tels que $\quad 2x_1 + 3x_2 - 1 = x_1 + x_2$

donc tels que $\quad x_1 + 2x_2 - 1 = 0$

donc tels que $x_1 + 2x_2 = 1$

Posons $\Delta = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 + 2x_2 = 1\}$



$\Delta \cap U$ partie de Δ evitant la droite $D : x_1 + x_2 = 0$

$\Delta \cap D \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$

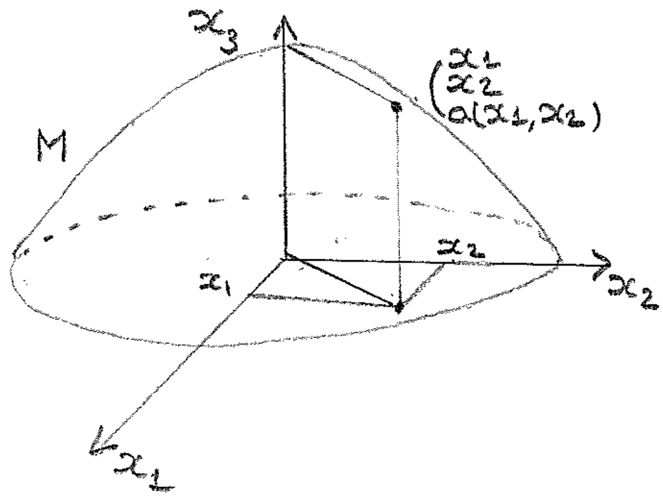
On trouve $\Delta \cap D = \{(-1,1)\}$

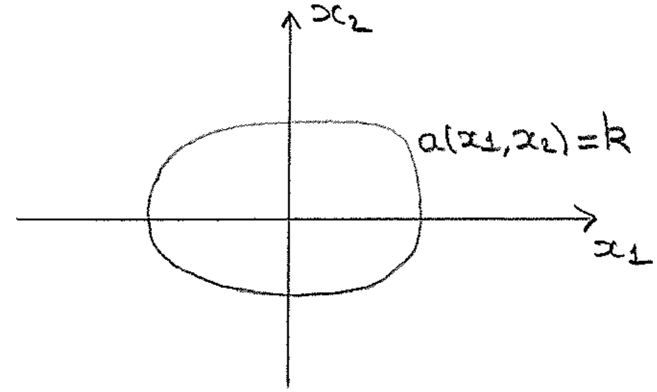
Ainsi $\Delta \cap U = \Delta - \{(-1,1)\}$ "droite Δ moins le point $(-1,1)$"

Soit une montagne M posé sur un plan horizontal. Choisissons un repère de ce plan. Considérons la fonction a

$a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x_1,x_2) \mapsto a(x_1,x_2)$ l'altitude du point de M se projettant perpendiculairement sur (x_1, x_2)

Le graphe de a ; $\Gamma_a = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x_3 = a(x_1, x_2)\}$ s'identifie à la montagne M.





Lignes de niveau de a

Une carte de M n'est autre que la donnée des lignes de niveau de la fonction a

Tangente à une ligne de niveau de f : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$

$f : U \to \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$

On suppose que f admet des dérivées partielles. Soit $k \in \mathbb{R}$ et

$E_k = \{ (x_1, x_2) \in U$ tels que $f(x_1, x_2) = k \}$

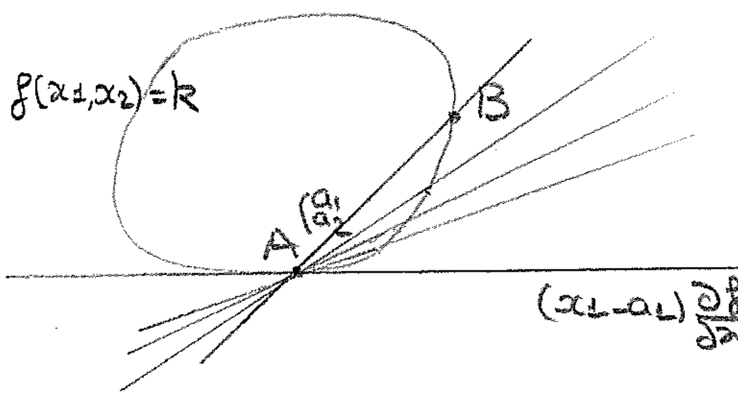
une ligne de niveau de f. Soit $A = (a_1, a_2) \in E_k$ qui ne soit pas un point critique de f : $f(a_1, a_2) = k \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right) \neq (0,0)$

Alors quand $B = (b_1, b_2) \in E_k$ tend vers A, la droite AB tend vers une droite d'équation :

$$(x_1 - a_1) \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) + (x_2 - a_2) \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) = 0$$

appelée tangente à E_k en A.

$E_k : f(x_1, x_2) = k$



$(x_1 - a_1) \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) + (x_2 - a_2) \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) = 0$

<u>Exemple</u> : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$E_1 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x_1, x_2) = 1\}$ n'est autre que le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in E_1$, $\quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_2$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$

$\left(x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2} + \left(x_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2} = 0$ est l'équation de la tangente en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ au cercle E_1.

<u>Théorème des fonctions implicites (2 variables)</u> Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2)$. On suppose que f admet des dérivées partielles continues sur U. Soit $k \in \mathbb{R}$ et $(a_1, a_2) \in \{ (x_1, x_2) \in U$ tels que $f(x_1, x_2) = k \}$ (autrement dit $(a_1, a_2) \in U$ et $f(a_1, a_2) = k$)

1) Si $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2) \neq 0$, alors E_k est localement au voisinage de (a_1,a_2) le graphe d'une fonction de x_1 : Il existe I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant a_1, J intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant a_2 et $g : I \to \mathbb{R}$ à dérivée continue tels que

$$\begin{cases} (x_1,x_2) \in I \times J \\ f(x_1,x_2) = k \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 \in I \\ x_2 = g(x_1) \end{cases}$$

2) Si $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2) \neq 0$, alors E_k est localement au voisinage de (a_1,a_2) le graphe d'une fonction de x_2 : Il existe I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant a_1, J intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant a_2 et $h : J \to \mathbb{R}$ à dérivée continue tels que

$$\begin{cases} (x_1,x_2) \in I \times J \\ f(x_1,x_2) = k \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 \in J \\ x_1 = h(x_2) \end{cases}$$

- <u>notation</u> $I \times J$ désigne les couples (x_1,x_2) de réels tels que $x_1 \in I$, $x_2 \in$

Exemple : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$E_1 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1^2 + x_2^2 = 1 \}$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in E_1$

$$\begin{cases} (x_1, x_2) \in \,]-1, 1[\times]0, \infty[\\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 \in \,]-1, 1[\\ x_2 = \sqrt{1 - x_1^2} \end{cases}$$

Théorème des fonctions implicites (n variables) U ouvert de $\mathbb{R}^n$

$f : U \to \mathbb{R}$ $(x_1, x_2, .., x_n) \mapsto f(x_1, x_2, .., x_n)$

On suppose que f admet des dérivées partielles continues sur U

Soit $(a_1, a_2, .., a_n) \in E_k = \{(x_1, .., x_n) \in U ; f(x_1, .., x_n) = k\}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, .., a_n) \neq 0$

Alors il existe V ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ contenant $(a_2, a_3, .., a_n)$

I ouvert de $\mathbb{R}$ contenant a_1

$h : V \to \mathbb{R}$ a dérivées partielles continues

$$\begin{cases} (x_1, x_2, .., x_n) \in I \times V \\ f(x_1, x_2, .., x_n) = k \end{cases} \iff \begin{cases} (x_2, x_3, .., x_n) \in V \\ x_1 = h(x_2, x_3, .., x_n) \end{cases}$$

Sous l'hypothèse $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, .., a_n) \neq 0$, on obtient de même que localement au voisinage de $(a_1, .., a_n)$, la ligne de niveau E_k est une fonction de $(x_1, .., x_{i-1}, x_{i+1}, .., x_n)$.