a) Donner la représentation graphique de $D_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tels que $7x_2 - 3x_1 = 21\}$. Puis de $H_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tels que $7x_2 - 3x_1 < 21\}$
b) Donner la représentation graphique de $D_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tels que $x_2 + 3x_1 = 0\}$. Puis de $H_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tels que $x_2 + 3x_1 > 0\}$
c)Donner la représentation graphique de $D_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tels que $x_1 = 1\}$.
Donner la représentation graphique de $H_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tels que $x_1 < 1\}$
d) Donner enfin la représentation graphique de :

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } x_1 < 1\ ,\ \ x_2 + 3x_1 > 0 \text{ et } 7\mathrm{x}_2 - 3\mathrm{x}_1 < 21\}\ .$$

e) Justifier que K est ouvert , borné et non fermé.

---

a) La représentation graphique de D_1 est une droite. L'équation $7x_2 - 3x_1 = 21$ donne pour $x_1 = 0$ le réel $x_2 = 3$ et pour $x_2 = 0$ le réel $x_1 = -7$. Ainsi, D_1 est la droite qui joint le point A_1 de coordonnées $(0, 3)$ et le point A_2 de coordonnées $(-7, 0$. La représentation graphique de H_1 est un demi-plan délimité par le droite d'équation $7x_2 - 3x_1 = 21$ qui n'est autre que la droite D_1. Le demi-plan H_1 est défini par une inégalité stricte ($<$). La droite D_1 n'est donc pas contenue dans H_1. De plus $7.0 - 3.0 = 0 < 21$. Le point de coordonnées $(0, 0)$ est donc dans H_1.

b) La représentation graphique de D_2 est une droite. Cette droite passe par l'origine puisque $0 + 3.0 = 0$. Elle passe aussi par le point B_2 de coordonnées $(-1, 3)$, puisque $3 + 3.(-1) = 0$. Ainsi, D_2 est la droite qui joint l'origine au point B_2 de coordonnées $(-1, 3)$. La représentation graphique de H_2 est un demi-plan délimité par le droite d'équation $x_2 + 3x_1 = 0$ qui n'est autre que la droite D_2. Le demi-plan H_2 est défini par une inégalité stricte ($>$). La droite D_2 n'est donc pas contenue dans H_2. De plus $1.1 + 3.0 = 1 > 0$. Le point de coordonnées $(0, 1)$ est donc dans H_2.

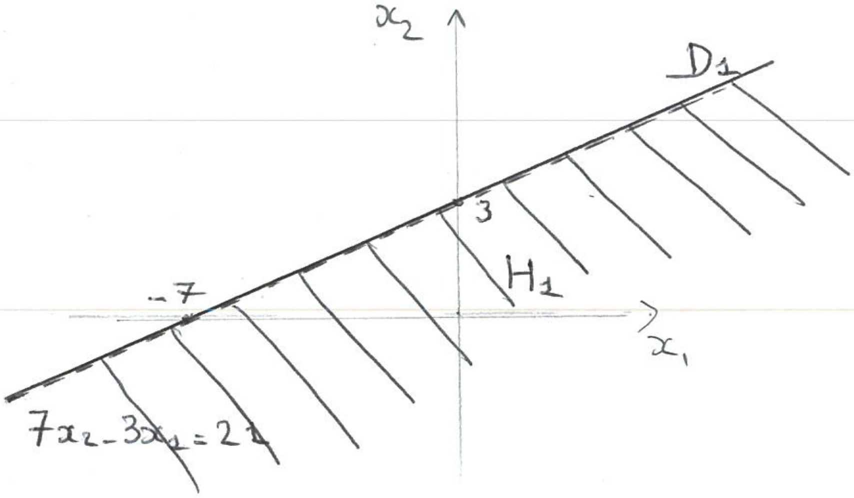
Plus généralement, si (a, b) sont deux réels non tous nuls, la droite d'équation $ax_1 + bx_2 = 0$ passe toujours par l'origine et le point de coordonnées $(-b, a)$.

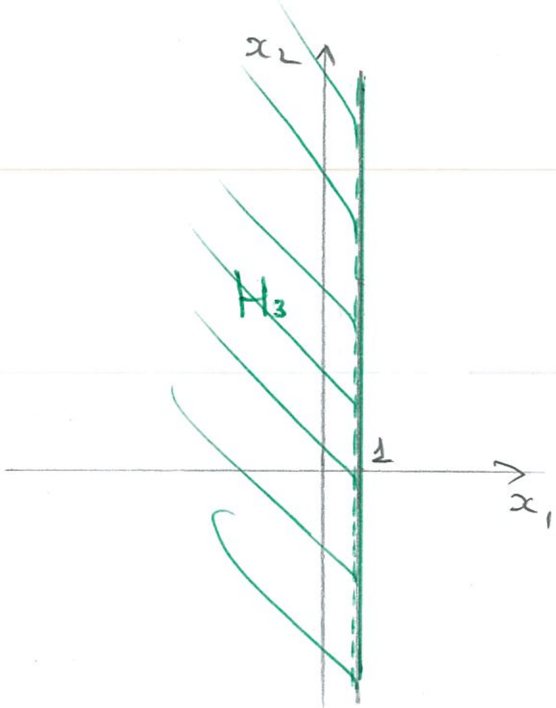
c) La représentation graphique de D_3 est une droite. Un point M est sur D_3 si seulement si sa première coordonnée est égale à 1. La droite D_3 est donc la paralèlle à l'axe des x_2 qui passe par le point B_3 de coordonnées $(1, 0)$. Le demi-plan H_3 est défini par une inégalité stricte ($<$). La droite D_3 est donc contenue dans H_3. De plus $0 < 1$. Le point de coordonnées $(0, 0)$ est donc dans H_3.

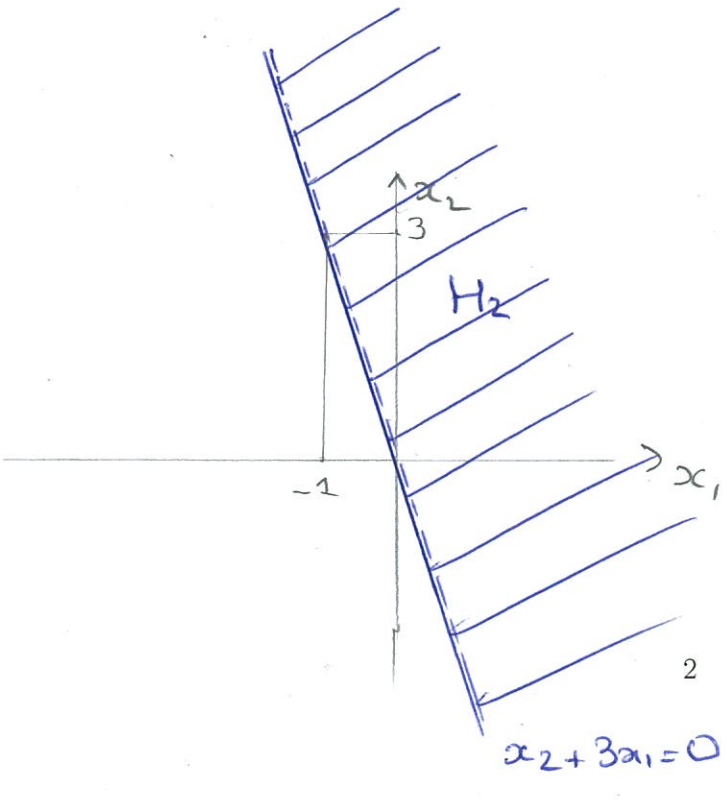
d) L'ensemble U est par définition l'intersection des ensembles H_1, H_2 et H_3. Les points M de coordonnées $(x_1, x_2) \in U$ sont donc les points appartenant à la représentation graphique de H_1, H_2 et H_3. Nous obtenons que la repésentation graphique de U est l'intérieur strict d'un triangle T. Le lecteur pourra montrer que ce triangle T est plus précisement le triangle qui joint les points de coordonnées :

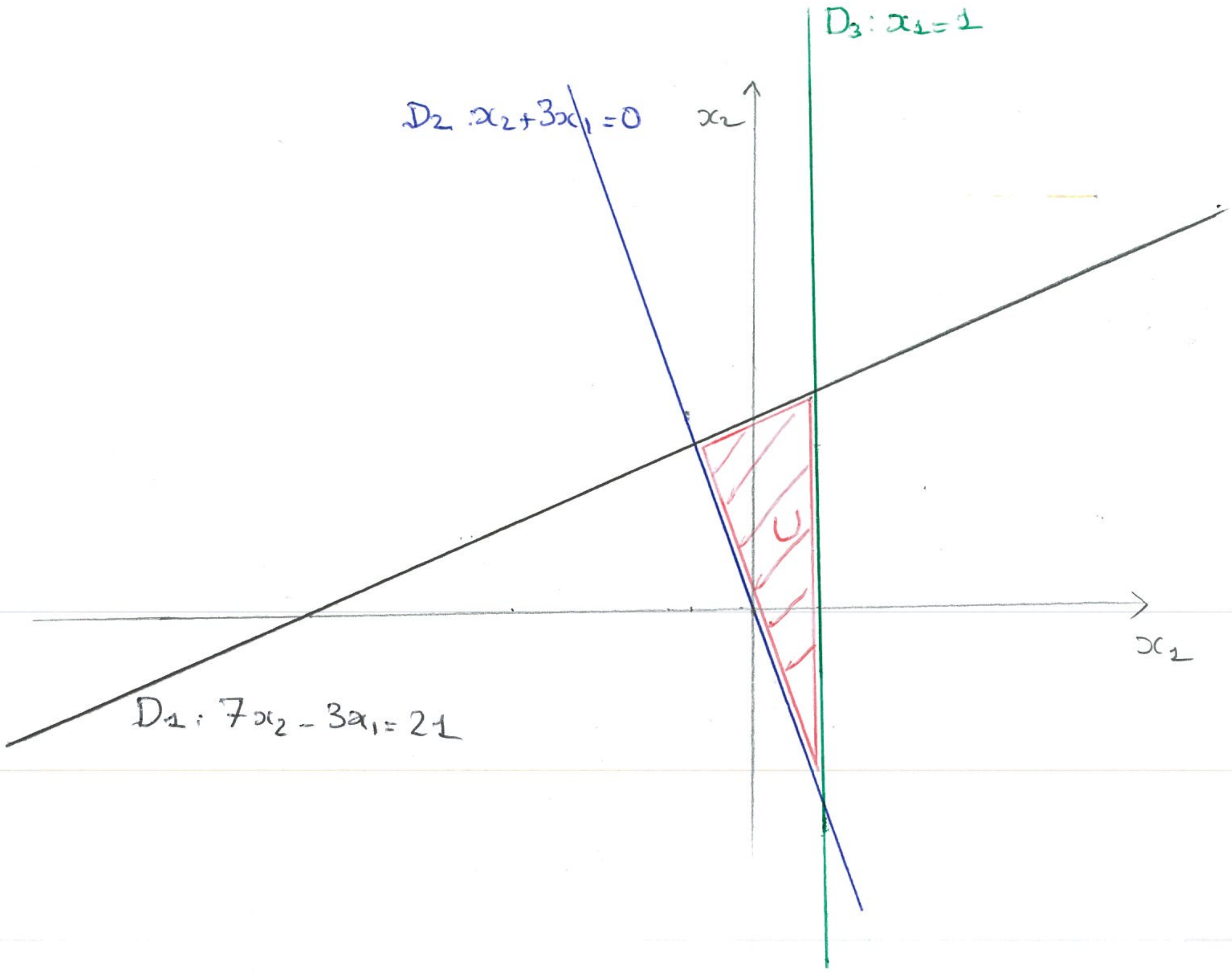
$$(1, -3) \quad , \quad (1, \frac{24}{7}) \quad \text{et} \quad (-\frac{7}{8}, \frac{21}{8})\ .$$

e) L'ensemble U est contenu dans un disque de centre l'origine et de rayon 10 par exemple. L'ensemble U est donc borné. L'ensemble U n'est pas fermé. En effet, un point du triangle T est dans le complémentaire de U et tout disque centre en un point de T rencontre U et donc n'est pas inclus dans le complémentaire de U. Enfin, U est par définition l'intersection des ensembles H_1, H_2 et H_3 : $U = H_1 \cap H_2 \cap H_3$. L'ensemble H_1 est défini par une fonction polynomiale ($(x_1, x_2) \mapsto 7x_2 - 3x_1$) donc continue et par une inégalité stricte < 21. C'est donc un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^2$. L'ensemble H_2 est défini par une fonction polynomiale ($(x_1, x_2) \mapsto x_2 + 3x_1$) donc continue et par une inégalité stricte > 0. C'est donc un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^2$. L'ensemble H_3 est défini par une fonction polynomiale donc continue ($(x_1, x_2) \mapsto x_1$) et une inégalité stricte < 1. C'est donc un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^2$. U est donc ouvert comme intersection d'ouvert.









$D_3 : x_1 = 1$
$D_2 : x_2 + 3x_1 = 0$
x_2
U
x_1
$D_1 : 7x_2 - 3x_1 = 21$