Licence de Sciences Économiques | Mathématiques L1 | Durée : 1 h 30

CALCULATRICES, DOCUMENTS ET TÉLÉPHONES PORTABLES INTERDITS.

IL SERA TENU COMPTE DU SOIN ET DE LA RÉDACTION DANS L'ÉVALUATION DES COPIES.

Exercice 1 – On considère l'application f définie par :

$$\begin{cases} f: & \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ & (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2) = -\frac{7}{2}x_1^2 - 2x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 - x_1 + x_2 + 21 \end{cases} .$$

1) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.
2) Montrer que f a un unique point critique (a, b) que l'on déterminera.
3) Monter que f admet un extremum local au point (a, b). Quelle est la nature de cet extremum ?
4) "Question de cours" : Soit une application $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Que signifie l'expression g a un minimum local en $(a, b) \in \mathbf{R}^2$?

Exercice 2 – Soit $V = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tels que $x_1 + 3x_2 \neq 0\}$.
On considère l'application f définie par :

$$\begin{cases} f: & V \longrightarrow \mathbf{R} \\ & (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2) = \dfrac{x_2^2 - 2x_1^2 + x_1x_2}{(3x_2 + x_1)^5} \end{cases} .$$

1) Représenter graphiquement V. Montrer que l'ensemble V est un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^2$.
2) Montrer que l'application f est homogène et préciser son degré d'homogénéité.
3) En déduire sans calcul une relation entre f et ses dérivées partielles d'ordre 1.

On considère maintenant l'application g définie par :

$$\begin{cases} g: & V \longrightarrow \mathbf{R} \\ & (x_1, x_2) \longmapsto g(x_1, x_2) = \dfrac{x_2 - 2x_1}{3x_2 + x_1} \end{cases} .$$

4) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de g. Puis, calculer pour tout $(x_1, x_2) \in V$:

$$x_1 \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) + x_2 \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) .$$

Que peut-on en déduire pour g ?
5) Calculer :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) .$$

Exercice 3 – On considère le sous-ensemble L de $\mathbf{R}^2$:

$$L = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \quad \text{tels que} \quad x_2 \geq 0 \text{ et } x_1 \geq 0 \text{ et } x_1 + x_2 \leq 3\} \quad .$$

A1) Représenter L en détaillant différentes étapes. Montrer que L est un sous-ensemble fermé et borné de $\mathbf{R}^2$.

On considère l'application f définie par :

$$\begin{cases} f : & \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ & (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 \quad . \end{cases}$$

A2) En quels points f peut-elle admettre un extremum local ?
A3) Justifier que l'application :

$$g : L \longrightarrow \mathbf{R} \,,\ (x_1, x_2) \longmapsto g(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 \quad .$$

un maximum et admet un minimum en des points de L.

On considère l'application h définie par :

$$\begin{cases} h : & \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R} \\ & (x_1, x_2, \lambda) \longmapsto h(x_1, x_2, \lambda) = x_1^3 + x_2^3 + \lambda(3 - x_1 - x_2) \quad . \end{cases}$$

B1) Calculer les trois dérivées partielles d'ordre 1 de h.
B2) Montrer que $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{27}{4})$ est un points critique de h.
B3) Nous admettons que ce point est le seul point critique de h. En déduire les points où la restriction de l'application $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3$ au sous-ensemble $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tels que $x_1 + x_2 = 3\}$ de $\mathbf{R}^2$ peut admettre un extremum local.
B4) Quels sont les points où g admet un minimum, un maximum ?

Solution de l'exercice 1 :

1) L'application f est polynomiale de deux variables. C'est donc une fonction continue sur $\mathbf{R}^2$. Elle admet de plus des dérivées partielles à tout ordre continues sur $\mathbf{R}^2$. Calculons les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = -7x_1 - 2x_2 - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -2x_1 - x_2 + 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = -7 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = -2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = -1 \quad .$$

2) Les points critiques de f sont les couples de réels (x_1, x_2) où les deux dérivées partielles d'ordre un de f sont nulles. Ceux sont donc les solutions dans $\mathbf{R}^2$ du système :

$$\left(\begin{array}{ccccccccc} -7x_1 & - & 2x_2 & - & 1 & = & 0 & & E_1 \\ -2x_1 & - & x_2 & + & 1 & = & 0 & & E_2 \end{array}\right. .$$

Nous en déduisons :

$$\left(\begin{array}{ccccccccc} -7x_1 & - & 2x_2 & - & 1 & = & 0 & & E_1 \\ -4x_1 & - & 2x_2 & + & 2 & = & 0 & & 2E_2 \end{array}\right. .$$

Ainsi, par différence : $3x_1 + 3 = 0$ et $x_1 = -1$. Reportons cette valeur dans E_2, nous obtenons successivement :

$$2 - x_2 + 1 = 0 \quad , \quad -x_2 + 3 = 0 \quad , \quad x_2 = 3 \, .$$

Ainsi, si f a un point critique ce point est le couple de réel $(a, b) = (-1, 3)$. Nous vérifions que ce couple convient bien et f admet donc comme unique point critique $(a, b) = (-1, 3)$.

3) Notre problème est un problème d'extremum libre à deux variables. Comme :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a,b)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a,b) - (\frac{\partial f}{\partial x_2}(a,b))^2 = (-7) \times (-1) - (-2)^2 = 7 - 4 = 3 > 0 \, ,$$

l'application f admet un extremum local au point critique (a, b). Comme de plus :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a,b) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a,b) = -7 - 1 = -8 < 0 \, ,$$

l'application f admet un maximum local au point critique (a, b).

4) L'application g a un minimum local en (a, b) si pour tout (x_1, x_2) dans un petit disque centré en (a, b), nous avons :

$$g(x_1, x_2) \geq g(a, b) \, .$$

Solution de l'exercice 2 :

1) La droite D d'équation $x_1 + 3x_2 = 0$ passe par l'origine. Un point d'abscisse $x_2 = 1$ est sur la droite D si et seulement si $x_1 + 3 = 0$. Ainsi, la droite D passe par le point de ccordonnées $(-3, 1)$. La représentation de V est l'ensemble des points non situés sur la droite D : voir dessin ci-dessous. Le sous-ensemble V de $\mathbf{R}^2$ est défini par une fonction polynomiale (donc continue) et une inégalité $\neq 0$. C'est donc un ouvert de $\mathbf{R}^2$.

2) Soit $(x_1, x_2) \in V$ et $\lambda > 0$:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \frac{(\lambda x_2)^2 - 2(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_1)(\lambda x_2)}{(3(\lambda x_2) + (\lambda x_1))^5} = \frac{\lambda^2(x_2^2 - 2x_1^2 + x_1 x_2)}{(\lambda(3x_2 + x_1))^5} = \frac{\lambda^2(x_2^2 - 2x_1^2 + x_1 x_2)}{\lambda^5(3x_2 + x_1)^5}$$

Il en résulte :

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^{-3}\frac{x_2^2 - 2x_1^2 + x_1 x_2}{(3x_2 + x_1)^5} = \lambda^{-3} f(x_1, x_2) \, .$$

Ainsi, f est homogène de degré d'homogénéité -3.

3) L'application f est rationnelle et admet donc des dérivées partielles sur V qui est son ouvert de définition. Comme toute fonction homogène de degré d'homogénéité -3 admettant des dérivées partielles, f vérifie l'identité d'Euler : pour tout $(x_1, x_2) \in V$,

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = (-3)f(x_1, x_2) .$$

4) Calculons les dérivées partielles de g :

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{(3x_2 + x_1)(-2) - (1)(x_2 - 2x_1)}{(3x_2 + x_1)^2} = \frac{-6x_2 - 2x_1 - x_2 + 2x_1}{(3x_2 + x_1)^2} = \frac{-7x_2}{(3x_2 + x_1)^2} .$$

De même :

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{(3x_2 + x_1)(1) - (3)(x_2 - 2x_1)}{(3x_2 + x_1)^2} = \frac{3x_2 + x_1 - 3x_2 + 6x_1}{(3x_2 + x_1)^2} \frac{7x_1}{(3x_2 + x_1)^2} .$$

Pour tout $(x_1, x_2) \in V$, nous en déduisons :

$$x_1 \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) + x_2 \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{-7x_1x_2}{(3x_2 + x_1)^2} + \frac{7x_2x_1}{(3x_2 + x_1)^2} = \frac{-7x_1x_2 + 7x_1x_2}{(3x_2 + x_1)^2} = 0$$

Ainsi, pour tout $(x_1, x_2) \in V$:

$$x_1 \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) + x_2 \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0 == 0g(x_1, x_2) .$$

L'application g est rationelle et admet donc des dérivées partielles sur V qui est son ouvert de définition. Elle vérifie l'identité d'Euler associée à la constante $k = 0$. L'application g est donc homogène de degré 0.

5) Calculons :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{(3x_2 + x_1)^2(-7) - 2(3)(3x_2 + x_1)(-7x_2)}{(3x_2 + x_1)^4} = \frac{(3x_2 + x_1)(-7) - 6(-7x_2)}{(3x_2 + x_1)^3}$$

$$= \frac{-21x_2 - 7x_1 + 42x_2}{(3x_2 + x_1)^3} = \frac{21x_2 - 7x_1}{(3x_2 + x_1)^3} .$$

Solution de l'exercice 3 :

A 1) Le sous-ensemble L de $\mathbf{R}^2$ est obtenu comme intersection des trois sous-ensembles de $\mathbf{R}^2$:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } x_1 \geq 0\} , \\ L_2 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } x_2 \geq 0\} , \\ L_3 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } x_1 + x_2 \leq 3\} \quad . \end{aligned}$$

L'ensemble L_1 se représente par le demi-plan H_1 délimité par la droite d'équation $x_1 = 0$ et contenant le point $(1, 0)$. L'ensemble L_2 se représente par le demi-plan H_2 délimité par la droite d'équation $x_2 = 0$ et contenant le point $(0, 1)$. L'ensemble L_3 se représente par un demi-plan H_3 délimité par la droite D d'équation $x_1 + x_2 = 3$. Le point A de coordonnées $(0, x_2)$ appartient à D si $x_2 = 3$ et le point B de coordonnées $(x_1, 0)$ appartient à D si $x_1 = 3$. Ainsi, les points A de coordonnées $(0, 3)$ et B de coordonnées $(3, 0)$ appartiennent à D. D'autre part $0 + 0 \leq 3$ et H_3 contient donc l'origine de coordonnées $(0, 0)$. L_3 se représente comme le demi-plan H_3 s'appuyant sur D qui contient l'origine. Ces trois demi-plans contiennent leurs droites d'appui, puisque les inégalités qui les définissent ($\geq 0, \geq 0, \leq 3$) sont larges. La représention de L est donc le triangle T avec son bord obtenu en prenant l'intersection des trois demi-plans H_1, H_2 et H_3. Voir le dessin, ci dessous.

Les sous-ensembles L_1, L_2 et L_3 sont définis par des fonctions polynomiales (donc continues) et des inégalités larges ≥ 0, ≥ 0 et ≤ 3. Ceux sont des fermés de $\mathbf{R}^2$. L'ensemble L est donc fermé comme intersection de trois fermés. De plus L est borné, car compris par exemple dans le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 4.

A 2) la fonction f est polynomiale. Un point où f peut admettre un extremum local est donc un point critique de f. Or ,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 3x_1^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 3x_2^2 \,.$$

Les points critiques de f sont donc les couples de réels (x_1, x_2) où les deux dérivées partielles d'ordre un de f sont nulles. Ceux sont donc les solutions dans $\mathbf{R}^2$ du système :

$$\left(\begin{array}{lcl} 3x_1^2 & = & 0 \\ 3x_2^2 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Il en résulte que $(0, 0)$ est le seul point critique de f. Le seul point où f peut admettre un extremum local est donc l'origine.

A 3) La fonction polynomiale f est continue. L'application g qui est la restriction de f à L est donc également continue. L'ensemble L est fermé borné. L'application g est donc une fonction numérique sur un fermé borné. Il existe dons des points de L où g est maximum (respectivement minimum).

B 1) L'application h est polynomiale, calculons ses trois dérivées partielles d'ordre 1 :

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, x_2, \lambda) = 3x_1^2 - \lambda \quad , \quad \frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1, x_2, \lambda) = 3x_2^2 - \lambda \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial \lambda}(x_1, x_2, \lambda) = 3 - x_1 - x_2 \,.$$

B 2) Pour montrer que $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{27}{4})$ est un points critique de h, il suffit de montrer que les trois trois dérivées partielles d'ordre 1 de h s'annulent en $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{27}{4})$:

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{27}{4}) = 3(\frac{3}{2})^2 - \frac{27}{4} = 3\frac{9}{4} - \frac{27}{4} = \frac{27}{4} - \frac{27}{4} = 0 \,,$$

de même

$$\frac{\partial h}{\partial x_2}(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{27}{4}) = 0$$

et enfin

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda}(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{27}{4}) = 3 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 3 - 3 = 0 \,.$$

B 3) Nous sommes sous les hypothèses du résultat du cours sur les extremas locaux 'une fonction f sous la contrainte $x_1 + x_2 = 3$. La fonction f admet un extremum local en restriction à l'ensemble D au point (a, b), c'est qu'il existe λ réel tel que (a, b, λ) est un point critique de la fonction de trois variables

$$f(x_1, x_2) + \lambda(3 - x_1 + x_2)$$

qui n'est autre que le fonction h. Or, h admet $(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{27}{4})$ comme unique point critique. Il en résulte :

$$(a, b) = (\frac{3}{2},\frac{3}{2}) \,.$$

B 4) Considérons l'ensemble

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \quad \text{tels que} \quad x_2 > 0 \text{ et } x_1 > 0 \text{ et } x_1 + x_2 < 3\} \quad .$$

Le sous-ensemble U est inclus dans L. C'est l'intersection des trois sous-ensembles de $\mathbf{R}^2$:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } x_1 > 0\} \,, \\ U_2 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } x_2 > 0\} \,, \\ U_3 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } -2x_1 + x_2 < 3\} \quad . \end{aligned}$$

Ces sous-ensembles U_1, U_2 et U_3 sont définis par des fonctions polynomiales (donc continues) et des inégalités strictes > 0, > 0 et < 3. Ceux sont des ouverts de $\mathbf{R}^2$. L'ensemble U est donc ouvert comme intersection de trois ouverts. Cet ensemble U est contenu dans K. Sa représentation géométrique est l'intérieur du triangle T qui représente L (ou encore le triangle T moins son bord).

Si le maximum de la restriction de f à K est atteint en un point (a, b) de U, comme U est un ouvert inclus dans K, ce serait un extremum local de f. Ce serait donc un point critique de f. Nous aurions donc $(a, b) = (0, 0)$. Or, ce point n'appartient pas à U. D'ou la contradiction. Ainsi, les points de L où la restriction de f à L sont maximum ne sont pas dans U. De même les points de K où la restriction de f à L sont minimum ne sont pas dans L. Ces points se situent donc sur le bord du triangle qui représente L. Un extremum local de f en restriction à la droite D ne peut être atteint qu'en $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$. Sur le cote horizontal de T, $f(x_1, x_2) = x_1^3$ qui n'admet d'extremum local qu'en $x_1 = 0$. De même, sur le cote vertical de T, $f(x_1, x_2) = x_2^3$ qui n'admet d'extremum local qu'en $x_2 = 0$. Ainsi, les couples cherchés sont parmi les quatres couples :

$$(0, 0) \,;\, (3, 0) \,;\, (0, 3) \,;\, (\frac{3}{2},\frac{3}{2}) \,.$$

Or :

$$f(0,0) = 0 < f(\frac{3}{2},\frac{3}{2}) = \frac{27}{8} + \frac{27}{8} = \frac{27}{4} < f(3,0) = f(0,3) = 27 \ .$$

Il en résulte que le point où g est minimum est $(0,0)$. Nous pourrions d'ailleurs trouver ce résultat directement et beaucoup plus rapidement. Les points où g sont maximum sont $(0,3)$ et $(3,0)$.