

# Mathématiques en L1

22 septembre 2016

## 1 S1 - Cours d'Algèbre en 2015-2016 ; 6 ECTS

Cours : Ph. Maisonobe, TD :Olivier Begassat, Christopher Goyet, Ann Lemahieu et Vladimir Kostov .  
1 cours d'1h30 et 2 TD d'1h30 par semaine sur 12 semaines

Un cours est en ligne. Les feuilles de td sont en ligne avec de plus de nombreux exercices types corrigés.

Ce cours était suivi par les options des parcours mathématiques , mathématiques-informatique et électronique.

### Chapitre 1 : Les nombres complexes

- 1.1 Le corps des nombres complexes : addition, multiplication, conjugaison, module.
- 1.2 Argument d'un nombre complexe, racine de l'unité.
- 1.3 Nombres complexes et géométrie , premières remarques.
- 1.4 Résolution algébrique des Equations de degré 2.
- 1.5 Similitude directe et leur interprétation comme composition d'une homothétie et d'une rotation de même centre.

Il s'agit d'un survol rapide sur les nombres complexes : 2 séances de Td , avec comme objectif savoir résoudre algébriquement une équation du second degré à coefficients complexes et trouver les invariants d'une similitude complexe.

## **Chapitre 2 : Systèmes d'équations linéaires**

- 2.1 Définitions
- 2.2 Transformer un système sans changer les solutions.
- 2.3 Opérations sur les n-uplets d'éléments de  $\mathbf{K}$ .
- 2.4 Système triangulé d'équations linéaires.
- 2.5 Algorithme de Gauss de triangulation d'un système.
- 2.6 Résolution d'un système triangulé d'équations linéaires.
- 2.7 Synthèse : Résolutions des systèmes d'équations linéaires.

Dans ce chapitre est explicitée une méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires basée sur l'algorithme de triangulation de Gauss. Un premier algorithme décide si un système a des solutions ou le transforme en un système triangulé ayant les mêmes solutions. On explique ensuite comment déterminer les solutions d'un système à l'aide des variables libres du système triangulé équivalent.

Objectif : Comprendre la méthode de résolution proposée dans le cours et pouvoir l'appliquer avec précision pour résoudre par exemple des systèmes de trois équations à quatre variables. Une terminologie y est introduite : variable libre et variable de tête d'un système triangulé. 2 cours et 4 TD y sont consacrés.

## **Chapitre 3 : Matrices**

- 3.1 Définitions
- 3.2 Matrices élémentaires
- 3.3 Matrices carrées inversibles
- 3.4 Matrices carrées inversibles de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$  et de  $\mathcal{M}_3(\mathbf{K})$

- 3.5 Algorithmes d'échelonnage et d'inversion des matrices
- 3.6 Matrices et résolution de systèmes linéaires
- 3.7 Suites récurrentes et matrices
- 3.8 Quelques résultats sur  $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$  et  $\mathcal{M}_3(\mathbf{K})$

2 cours et 4 séances de TD

Objectif :

1. Savoir multiplier des matrices et pratiquer le yoga des opérations sur les matrices.
2. Savoir calculer l'inverse d'une matrice carrée de taille 2 ou 3 par les deux méthodes :
  - calcul du déterminant et de la comatrice,
  - algorithme d'inversion à l'aide des matrices élémentaires.
3. Savoir passer d'un système d'équations linéaires à une équation matricielle et inversement.

## Chapitre 4 : Espaces Vectoriels

- 4.1 Définition, exemples
  - 4.2 Sous-espaces vectoriels
  - 4.3 Famille libre, famille génératrice et base
  - 4.4 Coordonnées d'un vecteur dans une base
  - 4.5 Dimension d'un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel
  - 4.6 Décider si une famille de vecteurs est une base
- Coordonnées d'un même vecteur dans des bases différentes

2 cours et 4 séances de TD

Objectif

- Connaître les définitions de base de la théorie :  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel , sous-espace vectoriel, combinaisons linéaires, vecteur nul, famille libre, famille liée, famille génératrice, base, coordonnées d'un vecteur dans

- une base, matrice de passage ...
- Soit  $E$  est un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel muni d'une base, considérons une famille de vecteurs donnés par leurs coordonnées dans cette base : Savoir décider si cette famille est libre ou si c'est une base de  $E$ .
- Soit  $E$  est un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel muni de deux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ , on suppose que les vecteurs de la base  $\mathcal{B}'$  sont donnés par leurs coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$  : savoir déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base à l'aide de ses coordonnées dans l'autre base, savoir déterminer les coordonnées des vecteurs de la base  $\mathcal{B}$  dans la base  $\mathcal{B}'$ , savoir donner la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ , savoir donner la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}'$  à la base  $\mathcal{B}$ .

## Chapitre 5 : Sous-Espaces Vectoriels

- 5.1 Sous-espaces vectoriels et dimension
- 5.2 Algorithme pour déterminer une base d'un sous-espace vectoriel
- 5.3 Algorithme donnant une base d'un sous-espace vectoriel
- 5.4 Algorithme pour déterminer les équations d'un sous-espace vectoriel
- 5.5 Intersection et somme de sous-espaces vectoriels
- 5.6 Quelques exemples d'espaces vectoriels

2 cours et 4 séances de TD

- Soit  $E$  et un espace vectoriel muni d'une base  $\mathcal{B}$  et  $u_1, \dots, u_p$  des vecteurs de  $E$ .
- Savoir déterminer à l'aide de  $M_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$  une base échelonnée de  $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$  et donc le rang de la famille  $(u_1, \dots, u_p)$ .
  - Savoir déterminer à l'aide d'une base échelonnée de  $F$  un système d'équations de  $F$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ .
  - Savoir montrer en petite dimension que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires. Dans ce cas, savoir préciser la décomposition d'un vecteur de  $E$  en somme d'un vecteur de  $F$  et d'un vecteur de  $G$ .

## Chapitre 6 : Applications linéaires

- 6.1 Généralités sur les applications ensemblistes
- 6.2 Définitions et opérations sur les applications linéaires
- 6.3 Application linéaire et sous-espaces vectoriels
- 6.4 Bases, dimension et applications linéaires
- 6.5 Matrice d'une application linéaire
- 6.6 Matrice d'une application linéaire et changement de bases

#### Objectif

- Comprendre les liens entre matrices et applications linéaires.
- Savoir déterminer la matrice d'une application linéaire dans de nouvelles bases en fonction de sa matrice dans d'anciennes bases :  $B = Q^{-1}AP$ .
- Savoir calculer le noyau et l'image d'une application linéaire en fonction de sa matrice.
- Savoir déterminer une symétrie et une projection vectorielle.

## 2 S1 - Analyse 1 en 2015-2016 ; 6 ECTS

Cours : F. Rapetti

1 cours d'1h30 et 2 TD d'1h30 par semaine sur 12 semaines

Ce cours était suivi par les étudiants des options : Mathématiques, Electronique, Physique, Maths/Info

Site web : <http://math.unice.fr/~frapetti/analyse.html> et livre Jean-Marie Monier : Analyse première année Dunod 1996.

### Chapitre 1 : Outils introductifs

- Un peu de logique (poly logique sur la page web) .  
Def. d'énoncé, table de vérité, négation d'un énoncé, connecteurs logiques (et, ou, implication simple,

implication double). Prédicat (énoncé qui contient une ou plusieurs variables), quantificateurs universels (pour chaque, existe). Les 4 grands types de raisonnement (tautologies) : (1) modus ponens ou déductif, (2) par contraposition, (3) par l'absurde (4) par récurrence.

— Dans  $\mathbf{R}$  (Chap. 1 du livre).

Rélation d'ordre ( $\leq$ ), notion de majorant, minorant, borne supérieure, borne inférieure, maximum, minimum d'une partie  $A$  non vide. Notion et type d'intervalles dans  $\mathbb{R}$ . Prop de la borne sup, ou de la borne inf (seulement énoncé).

— Fonctions réelles d'une variable réelle (poly fonctions sur la page web et Chap 4. du livre).

définition, domaine et image d'une fonction, fonction composée de deux autres fonctions, fonction injective, surjective, bijective. Fonction réciproque. Fonctions monotones. Fonctions à connaître avec leurs propriétés : puissance, logarithme, exponentielle, trigonométrique.

## **Chapitre 2 : Suites numériques réelles** (poly suites numériques réelles)

— Définition de suite numérique, de suite numérique qui converge, qui diverge, de sous-suite.

— Prop AVEC preuve : unicité de la limite, une suite qui converge est bornée, permanence du signe, prop. des gendarmes, suite réelle croissante majorée converge à sa borne sup., suites adjacentes qui convergent à une même limite.

— Quelques limites standard et calcul de limite. Classe limite pour les sous-suites.

— Prop SANS preuve : Thm de Bolzano-Weierstrass, convergence d'une sous-suite.

— Critère de Cauchy et preuve que  $\mathbb{R}$  est complet.

— Suites récurrentes : arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2, suites récurrentes générales d'ordre 1 de type point fixe.

— Symboles de Landau : “petit o”, “grand O”,  $\sim$ , même ordre de grandeur.

## **Chapitre 3 : Operation de limite et fonction continues** (Chap 4 du livre)

— Limite de fonction en un point : déf topologique, déf métrique, déf par les suites, limite en un point équivalent à dire que la limite à droite et à gauche existent et coïncident.

— Unicité de la limite, permanence du signe, calcul de limites, encadrement.

— Opérations algébriques sur les fonctions admettant une limite.

- Asymptotes : horizontaux, verticaux, obliques
- Définition de fonction continue, type de discontinuité de fonction en un point.
- Opérations algébriques sur les fonctions continues.
- Thm des valeurs intermédiaires : énoncé, preuve par procédé de dichotomie, remarques, utilisation pour encadrer les valeurs d'une fonction sur un intervalle.
- Continuité d'une fonction sur un segment, continuité de la fonction réciproque.

#### **Chapitre 4 : Dérivée d'une fonction** (Chap 5 du livre)

- Définition : dérivée à droite, dérivée à gauche, prop. fonction dérivable en un point est continue en ce point.
- Règles de dérivation. Dérivée de la fonction composée, de la fonction réciproque.
- Dérivées successives.
- AVEC preuve : Thm de Fermat, thm de Rolle, thm de Cauchy, thm des accroissements finis (Lagrange), thm de l'Hôpital.
- Fonction croissante, décroissante, extremas de fonctions, concavité, type de discontinuité' de la fonction dérivée.
- Graphe de fonction.

#### **Chapitre 5 : Formule de Taylor et application dans le calcul des limites de fonctions**

#### **Chapitre 6 : Intégrale de Riemann** (Chap 6 du livre)

- Définition de la notion d'intégrale défini
- définition de primitive d'une fonction. Thm de Riemann. Calcul d'aire.
- Calcul d'intégrales simples. Technique du changement de variable. Intégration par parties.
- Calcul approché d'un intégrale par des formules de quadratures : rectangles, trapèzes, Simpson.

### 3 S1 - Option Mathématiques en 2014-2015 ; 4 ECTS

Cours : D. Chiron, TD : D. Chiron et Z. Wojtkowiak. En 2015-2016, le cours a été repris par Z. Wojtkowiak. 1 cours d'1h30 et 1 TD d'1h30 par semaine sur 12 semaines

#### Chapitre 1 : Les entiers

Division euclidienne ; décomposition en facteurs premiers (théorème fondamental de l'arithmétique) ; PGCD et PPCM, algorithme d'Euclide ; écriture des entiers en base quelconque.

Objectifs

- Savoir manipuler les symboles  $\Sigma$ , la récurrence, le raisonnement par l'absurde.
- Savoir calculer un PGCD par l'algorithme d'Euclide.
- Savoir calculer (addition, soustraction, multiplication) en bases quelconque.
- Savoir utiliser le théorème de décomposition en facteurs premiers pour des résultats d'irrationalité

#### Chapitre 2 : Les réels

2.1 Définition comme développement décimal (propre) infini ; propriété de la borne supérieure ; convergence des suites (suite croissante majorée, théorème des gendarmes) ; addition et multiplication ; suites adjacentes (application à la constante d'Euler) ; existence de  $1/x$  et de  $\sqrt{x}$  par dichotomie.

2.2 Les rationnels, caractérisation par leur développement décimal périodique ; irrationnalité de  $\sqrt{2}$ .

2.3 Suites de Cauchy ; théorème de Bolzano-Weierstrass (application : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes) ; définition de l'intégrale des fonctions continues sur un segment ; irrationnalité de  $\pi$ .

Objectifs

- Savoir déterminer une borne supérieure/inférieure.



- Savoir manipuler les résultats fondamentaux de convergence sur les suites.
- Savoir déterminer la période d'un rationnel, une forme fractionnaire d'un réel avec un développement périodique.
- Savoir manipuler des suites extraites.

## 4 S2 - Analyse 2 en 2015-2016 ; 6 ECTS

Cours : N. Mestrano, 1 cours d'1h30 et 2 TD d'1h30 par semaine sur 12 semaines

Ce cours était suivi par les options des parcours mathématiques , mathématiques-informatique et électronique.

### Chapitre 1 : Equivalents — Développements Limités

- 1.1 Equivalents
- 1.2 Développements limités
- 1.3 Développements limités usuels
- 1.4 Opérations sur les développements limités
- 1.5 Compositions des Développements limités
- 1.6 Quelques exemples de calculs de quotients de développements limités
- 1.2 Développements limités et continuité

2 cours et 4 séances de TD

Objectif : Ce chapitre est un approfondissement du chapitre 5 (Formule de Taylor et application dans le calcul des limites de fonctions) du cours d'analyse du premier semestre. On apprendra à manipuler les développements limités et à les utiliser pour calculer des limites de fonctions.

## **Chapitre 2 : Intégration sur un segment**

- 2.1 Intégrale sur un segment
- 2.2 Primitives
- 2.3 Techniques d'intégration
- 2.4 Approximation d'une intégrale par les sommes de Riemann
- 2.5 Intégration et développements limités
- 2.6 Dérivation et développements limités
- 2.5 Intégration des fractions rationnelles

2 cours et 4 séances de TD

Objectif : Savoir utiliser différentes techniques pour calculer une intégrale donnée. Ce chapitre est une révision et un approfondissement du chapitre 6 du cours d'analyse du premier semestre.

## **Chapitre 3 : Intégration sur un intervalle quelconque**

- 3.1 Un exemple d'intégrale impropre
- 3.2 Définitions
- 3.3 Propriétés
- 3.4 Cas des fonctions positives sur un intervalle non borné
- 3.5 Fonctions intégrables
- 3.6 Convergence absolue — intégrabilité
- 3.7 Intégrales de Riemann
- 3.7 Récapitulatif pour utiliser les différentes méthodes de calcul des intégrales

2 cours et 4 séances de TD

Objectif : Savoir repérer les problèmes qui se posent et, éventuellement, les résoudre avant d'utiliser les

différentes techniques pour calculer une intégrale impropre donnée.

#### **Chapitre 4 : Suites numériques**

- 4.1 Définitions
- 4.2 Limites
- 4.3 Suites monotones, suites adjacentes
- 4.4 Suites de Cauchy
- 4.5 Opérations sur les limites
- 4.6 Suites récurrentes

2 cours et 4 séances de TD

Objectif : Etre tout à fait à l'aise avec la manipulation des suites numériques (notion déjà vue au chapitre 2 du cours d'analyse du premier semestre) avant d'aborder les suites de fonctions et les séries.

#### **Chapitre 5 : Séries numériques**

- 5.1 Définitions
- 5.2 Nature d'une série
- 5.3 Séries à termes positifs
- 5.4 Convergence absolue
- 5.5 Convergences de référence
- 5.6 Reste d'une série
- 5.7 Quelques critères pour obtenir la nature d'une série

2 cours et 4 séances de TD

Objectif : Déterminer la nature d'une série donnée, éventuellement savoir en calculer la somme.

## Chapitre 6 : Suites de fonctions

- 6.1 Définitions — Convergences
- 6.2 Théorème d'inversion entre limites
- 6.3 Théorème d'inversion : limite et continuité
- 6.4 Théorème d'inversion : limite et intégration
- 6.5 Théorème d'inversion : limite et dérivation

2 cours et 4 séances de TD

## 5 S2 - Mathématiques discrètes en 2015-2016 ; 4 ECTS

Cours : F.-X. Dehon , 1 cours d'1h30 et 1 TD d'1h30 par semaine sur 12 semaines

Un résumé de chaque séance, les feuilles d'exercices, annales et quelques corrigés sont disponibles sur la page WEB du cours.

Le cours propose une approche informatique (langage, preuves formelles) et insiste sur les règles de calcul pour les thèmes classiques de mathématiques discrètes dont certains ont été vus au premier semestre (chapitre 1 du cours d'analyse (logiques, ensembles, relations, fonctions), option mathématiques (arithmétique des entiers, récurrence, représentation des nombres rationnels), option informatique (calcul propositionnel)).

**Chapitre 0** : Un premier exemple de langage et de règles de calcul (réécritures) : représentation décimale des entiers et opérations élémentaires.

**Chapitre 1** : Constantes, variables libres, variables liées, expressions et leurs types rencontrées dans les formules et énoncés mathématiques. Formalisation des énoncés classiques de première année.

**Chapitre 2 :** Calcul propositionnel : tables de vérité, traductions en langage naturel de l'implication, calcul dans l'algèbre booléenne.

**Chapitre 3 :** Énoncés avec quantificateur, définition d'une formule, organisation d'une preuve (règles de réécriture), esquisse de preuve.

**Chapitre 4 :** Énoncés et formules pour les ensembles ; relations, applications, composition d'applications.

**Chapitre 5 :** Les entiers : construction par récurrence, raisonnement par récurrence, définition de  $+$ ,  $\times$ ,  $<$ , cardinalité des ensembles.

**Chapitre 6 :** Représentations des entiers relatifs, des nombres rationnels, calculs avec ces représentations.

**Chapitre 7 :** Permutations de  $\{1, \dots, n\}$ , décomposition en cycles, puissance d'une permutation.

## **6 S2 - Option Mathématiques en 2015-2016 ; 4ECTS**

Cours : E. Militon , 1 cours d'1h30 et 1 TD d'1h30 par semaine sur 12 semaines

Un résumé de cours et les feuilles de TD seront disponibles en ligne. Ce cours était suivi par des étudiants des parcours mathématiques, mathématiques-informatique, informatique, électronique.

### **Chapitre 1 : Géométrie vectorielle euclidienne du plan et de l'espace**

- 1.1 Produit scalaire et norme : définition, orthogonal d'une partie, Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire.
- 1.2 Bases orthonormées : familles et bases orthonormées, procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, .
- 1.3 Déterminant et orientation : définition, interprétation géométrique, déterminants et bases, orientation

d'une base.

1.4 Produit vectoriel : définition, propriétés, lien avec les bases orthonormées directes.

3 cours et 3 séances de TD.

Objectifs :

- Connaître le vocabulaire de la géométrie euclidienne et savoir retrouver les propriétés simples du cours.
- Savoir calculer l'orthogonal d'une partie et interpréter géométriquement et en terme d'orthogonal les équations.
- Savoir appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
- Savoir utiliser le déterminant pour montrer qu'une famille est une base. Savoir montrer qu'une base est directe ou indirecte.
- Savoir compléter une famille orthonormée en une base orthonormée.
- Savoir manipuler des produits vectoriels.

## **Chapitre 2 : Automorphismes orthogonaux du plan et de l'espace**

2.1 Automorphismes orthogonaux et matrices orthogonales : définitions et caractérisations

2.2 Exemples d'automorphismes orthogonaux : réflexions du plan et de l'espace, rotations du plan et de l'espace

2.3 Automorphismes orthogonaux du plan : tout automorphisme orthogonal du plan s'écrit comme composée d'au plus deux réflexions, classification des automorphismes orthogonaux du plan.

2.4 Automorphismes orthogonaux de l'espace : tout automorphisme orthogonal de l'espace s'écrit comme composée d'au plus trois réflexions, classification des automorphismes orthogonaux directs de l'espace.

4 cours et 5 séances de TD.

Objectifs :

- Connaître et savoir retrouver les propriétés des automorphismes orthogonaux et des matrices orthogonales.

- Savoir ce qu'est une rotation (vectorielle) ou une réflexion du plan ou de l'espace.
- Savoir calculer la matrice d'une rotation/réflexion dans n'importe quelle base.
- Étant donnée une matrice  $2 \times 2$  ou  $3 \times 3$ , savoir démontrer qu'elle est orthogonale (directe) et, le cas échéant, savoir retrouver les caractéristiques de la rotation qu'elle représente.

### Chapitre 3 : Quaternions

3.1 Construction matricielle des nombres complexes.

3.2 Les quaternions : construction et propriétés algébriques : construction des quaternions, propriétés des opérations, conjugaison, norme, inverse, forme polaire.

3.3 Quaternions et rotations de l'espace : correspondance rotation de l'espace/quaternion, application au calcul de composées de rotations. Intérêt en termes de temps de calcul.

5 cours et 4 séances de TD.

Objectifs :

- Être capable de manipuler les quaternions (somme, produit, inverse, mettre sous forme polaire).
- Comprendre la construction matricielle des quaternions.
- Comprendre la correspondance quaternions/rotations.
- Savoir déterminer les caractéristiques d'une composée de rotations de l'espace à l'aide des quaternions.