Ch 4 - Indications sur les systèmes dynamiques discrets.

§1 - Introduction :

Ici, le temps est discret : il est noté n ou $t \in \mathbb{N}$.
On appelle équation aux différences (ED) ou équation de récurrence une relation du type

$$x_{n+1} = f(n, x_n) \quad \text{ou} \quad x_{t+1} = f(t, x_t) \qquad (*)$$

on parle alors d'une ED du premier ordre, autonome si $f(t, x_t) \equiv f(x_t)$, linéaire si $f(t, x_t) = a(t)x_t + b(t)$, à coefficients constants si $a(t) \equiv a$ est constant, sans second membre (ou homogène) si $b(t) \equiv 0$. De même, une ED de la forme

$$x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_2 x_t = f(t) \quad (\text{connue } \forall t) \qquad (**)$$

est une ED d'ordre 2, linéaire, à coefficients constants, inhomogène si $f(t) \not\equiv 0$. On peut aussi introduire la notion de SD du premier ordre (système d'équations aux différences, ou système dynamique discret) :

$$X_{t+1} = F(X_t), \quad F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ exemple } (***)$$

$$X_{t+1} = AX_t + b, \quad A \text{ matrice (constante)} \ldots$$

Le pb à condition initiale consiste à ajouter à l'ED une (ou des) condition(s) initiale(s), e.g. x_0 donné pour $(*)$, (x_0, x_1) donnés pour $(**)$. Ce pb a une solution unique, définie par récurrence. La question est : quel est le comportement de x_t quand $t \to +\infty$?

2 - E.D. non linéaires du premier ordre

Notation : on note le temps discret $n \in \mathbb{N}$ ou $t \in \mathbb{N}$

. On considère ici uniquement le cas d'une ED autonome :

$$\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t), & (1) \\ x_0 = x(0) \text{ donné : condition initiale} & (C.I.) \end{cases}$$

le temps discret t n'intervient pas explicitement dans (1)

. Evidemment, la suite $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est déterminée de manière unique par (1) et (C.I.). Rem ⚠ cette fois, l'ensemble E des suites (x_t) solutions n'est pas en général un e.v. !!

. Exemple 1 : le modèle de croissance de Solow (discret)

$$k_t = \frac{1}{1+n}\left[s f(k_t) + (1-\delta) k_t\right] := g(k_t), \quad 0<s<1, \quad 0<\delta<1, \quad n>0$$

f fonction ↗ et concave tq $\begin{cases} f(0)=0, \ f'(k) \underset{k\to 0}{\to} +\infty, \\ \text{et } f'(k) \underset{k\to+\infty}{\to} 0 \end{cases}$

k : capital par tête,
$f(k)$: production de capital " "
s : propension marginale à économiser
δ : taux de dépréciation du capital
n : taux de ↗ de la population

. Etats d'équilibre : ils correspondent à $k_t \equiv k_e = c^{te} \iff \boxed{g(k_e) = k_e}$

On étudie la fonction : $g(k) := \frac{1}{1+n}(s f(k) + (1-\delta)k)$:

$g'(k) = \frac{1}{1+n}(s f'(k) + 1 - \delta) > 0,$

$g''(k) = \frac{1}{1+n} s f''(k) < 0$. Ensuite, $g'(k) \to \begin{cases} +\infty & \text{pour } k \to 0_+ \\ 1-\delta & \text{" } k \to +\infty \end{cases}$

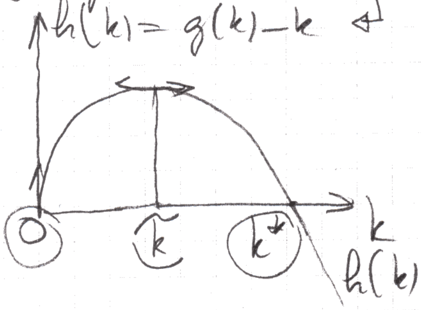
Donc posons $h(k) := g(k) - k$. On a :

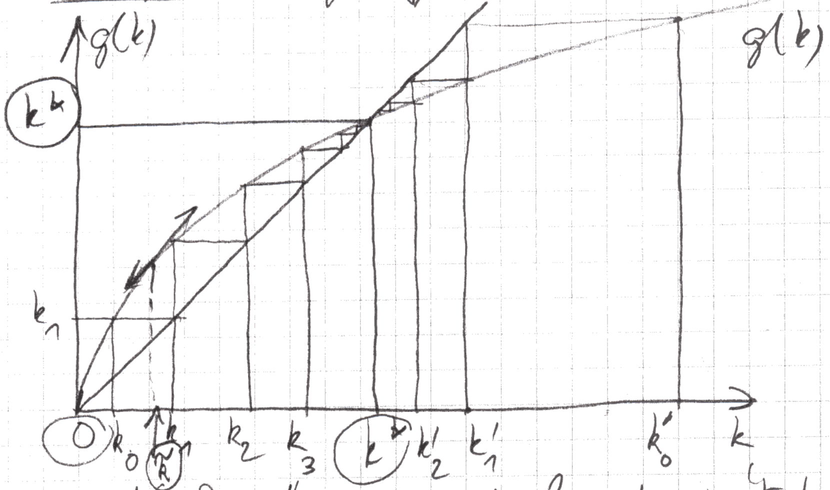
$$h'(k) = \begin{cases} g'(k) - 1 \to +\infty & (k \to 0_+) \\ -\delta < 0 & (k \to +\infty) \end{cases}$$

k	0	$\tilde{k}$	k^*	$+\infty$
$h''(k)$	$-$	$-$	$-$	
$h'(k)$	$+\infty$ ↘ $+$	0 $-$	$-$	
$h(k)$	0_+ ↗	$+$ ↘	0 $-$	

Donc $g(k) = k$ ssi $\begin{cases} k = 0 \text{ ou} \\ k = k^* \end{cases}$

Graphe de h :   Graphe de g :





Donc le graphe de g décrit d'une part les deux états d'équilibre : $k = 0$ et $k = k^*$, et d'autre part leur stabilité : (i) $\forall k_0 \in]0, k^*]$, par récurrence on voit que

$\forall t \in \mathbb{N},\ 0 \leq k_t \leq g(k_t) = k_{t+1} \leq k^*$, donc la suite $(k_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est $\nearrow$ et majorée par k^* : elle CV vers ℓ tq $0 < \ell \leq k^*$, et par continuité de g, $k_{t+1} = (k_t) \underset{(t\to+\infty)}{\longrightarrow} g(\ell)$

Donc $\ell = g(\ell) > 0$, donc $\ell = k^*$.

$\forall k_0 \in]0, k^*]$, (k_t) tend en croissant vers k^* quand $t \to +\infty$

(ii) de même, $\forall k_0 \geq k^*$, on a :

$\forall t \in \mathbb{N},\ k^* \leq k_{t+1} = g(k_t) \leq k_t \leq \dots \leq k_0$, donc la suite (k_t) est $\searrow$ et minorée, donc CV en $\searrow$ vers une limite $\ell \geq k^*$, tq $\ell = g(\ell)$, donc $\ell = k^*$:

$\forall k_0 \geq k^*$, (k_t) tend en décroissant vers k^* quand $t \to +\infty$.

Ceci illustre un cas particulier du Thm de point fixe de Picard :

Thm 9 : Soit la suite $x_{t+1} = f(x_t)$ (1).

Supposons qu'il existe un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ tel que (i) $f(I) \subset I$, et

(ii) $\sup_{t\in I} |f'(t)| \leq c < 1$

Thm 9 (suite) :

Alors
(a) $\exists$ un unique point fixe x de f dans I :
$\exists x \in I$, unique, tq $x = f(x)$
(b) $\forall x(0) \in I$, la suite (x_t) solution de

$$x_{t+1} = f(x_t)$$
$$x_0 = x(0)$$

reste dans l'intervalle I $\forall t \in \mathbb{N}$, et CV vers x^* quand $t \to +\infty$: x^* est fortement stable, ou asymptotiquement stable.

Dém. Par récurrence, $\forall x_0 \in I$, $\forall t \in \mathbb{N}$, $x_{t+1} = f(x_t) \in f(I) \subset I$

Ensuite, $\forall t \in \mathbb{N}$, $|x_{t+1} - x_t| = |f(x_t) - f(x_{t-1})|$
$= |f'(\xi_t)(x_t - x_{t-1})|$,
avec ξ_t entre x_{t-1} et x_t, donc $\xi_t \in I$. Donc $|f'(\xi_t)| \leq c < 1$. Donc
$\forall t \in \mathbb{N}$, $|x_{t+1} - x_t| \leq c\,|x_t - x_{t-1}| \leq \dots \leq (c)^t |x_1 - x_0|$
Donc la série $\sum_{t=0}^{+\infty}(x_{t+1} - x_t)$ CV comme la série géométrique c^t, avec $|c| < 1$. Sa limite est

$$x^* - x_0 = \lim_{n \to +\infty} \sum_{t=0}^{n-1}(x_{t+1} - x_t) = \lim_{n \to +\infty}(x_n - x_0),$$

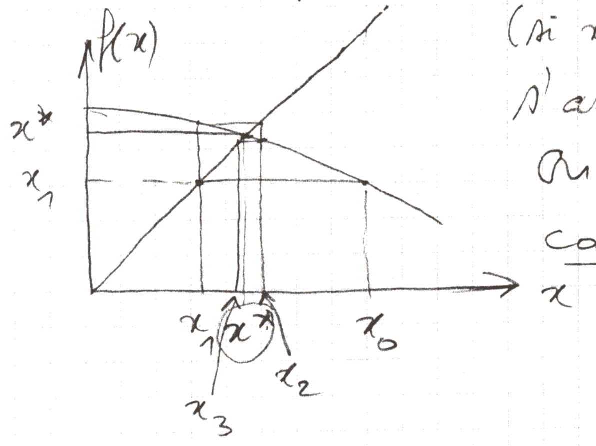
donc $x_n \xrightarrow[(n \to +\infty)]{} x^*$, et de même $x_{n+1} = f(x_n) \xrightarrow[(n \to +\infty)]{} \underset{x^*}{\overset{\parallel}{f(x^*)}}$,

donc x^* est un point fixe, et c'est le seul car s'il en existait un autre : x_*, on aurait $|f(x^*) - f(x_*)| = |x^* - x_*| \leq \underbrace{c}_{0<c<1}|x^* - x_*|$,

donc $x^* - x_* = 0$: $x^* = x_*$. □

Rem. Dans l'exemple 1, le Thm s'applique avec $I = [\tilde{k}, +\infty[$. On vérifie cependant directement que si on part de $k_0 \in]0, \tilde{k}]$, au bout d'un nombre fini p de fois, on aura : $\forall n \geq p$, $k_n \geq \tilde{k}$. □

Rem. Dans le cas où f vérifie les hypothèses du Thm, avec $f \searrow$ sur I, on a la figure ci-contre



(si $x_0 > x^*$) : dans ce cas, le Thm 1 s'applique avec $I = [x_1, x_0]$.
On a alors une figure du type cobweb (toile d'araignée). ☐

Exemple 2 : L'équation logistique (indications)

$$\boxed{x_{t+1} = f(x_t) := \lambda\, x(1-x)\ ,\quad \lambda > 0}\ ,\ \text{avec } x_0 \in [0,1]$$

On étudie la fonction f :

x	0		$1/2$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\lambda/4$	$\rightarrow$	0

$f'(x) = \lambda(1-2x)$

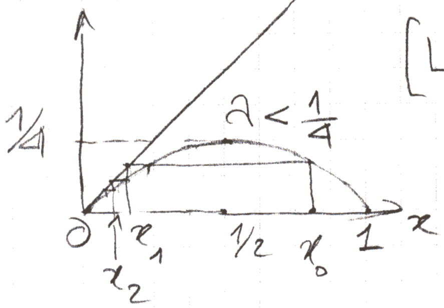
Alors l'intervalle $I := [0,1]$ est invariant par f si $0 \leq \lambda \leq 4$.

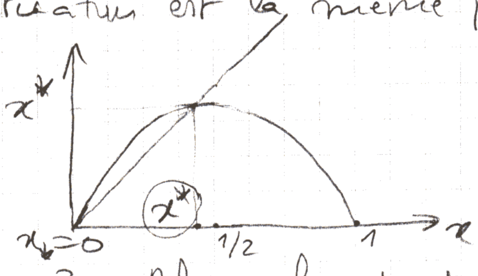
Dans ce cas $\sup\limits_{x \in [0,1]} |f'(x)| = |f'(0)| = |f'(1)| = \lambda$

a) Premier cas : $0 < \lambda < 1$, alors $f(I) \subset I$ et $\sup\limits_{x\in I} |f'(x)| = \lambda < 1$

donc f admet un unique point fixe $x^* \in [0,1]$: $x^* = 0$
et $\forall x_0 \in [0,1]$, la suite (x_t) cv en $\searrow$ vers $x^* = 0$:
$x^* = 0$ est un équilibre stable
[La situation est la même pour $\lambda = 1$].

CV monotone





b) Deuxième cas : $1 < \lambda < 3$. Alors f admet deux points fixes sur $[0,1]$: $x_* = 0$ et x^* solution de $x^* = \lambda x^*(1-x^*)$

$\Leftrightarrow x^*(1 - \lambda(1-x^*)) = 0,\ x^* \neq 0 \Leftrightarrow x^* = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda} \in]0,1]$

D'abord, 0 devient instable. Etudions la stabilité de $x^* > 0$

Etudions f' dans ce cas : $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)| = |f'(0)| = |f'(1)| = \lambda \in]1,3[$,

donc on ne peut pas appliquer le thm 1 à $I=[0,1]$. Par contre, calculons

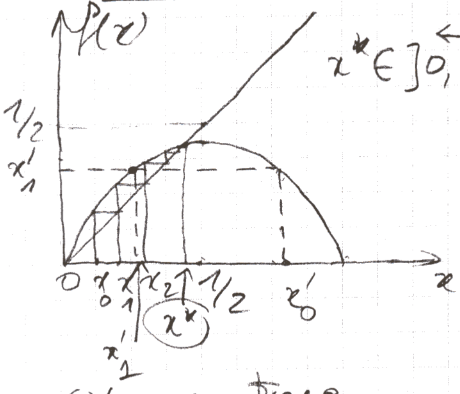
$$|f'(x_e)| = |\lambda(1-2x_e)| = \left|\lambda\left(1-\frac{2(\lambda-1)}{\lambda}\right)\right| = \frac{\lambda}{\lambda}|(2-\lambda)| = |2-\lambda| < 1.$$

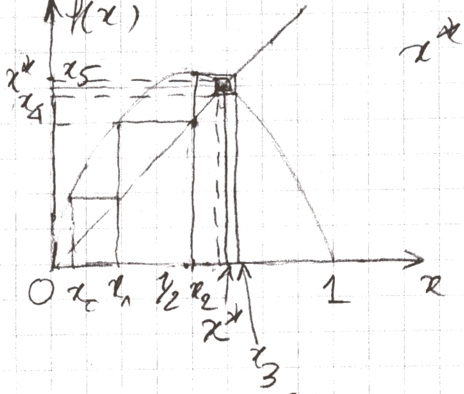
Donc on peut appliquer le thm sur un voisinage de x^*.

Illustration : cas 2 : $1<\lambda<3$

Sous-cas (i) : $1<\lambda<2$; Sous-cas (ii) : $2<\lambda<3$

$x^* \in]0, 1/2[$ $\qquad$ $x^* \in]1/2, 1[$



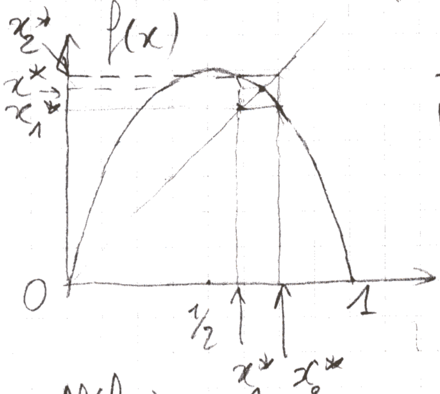


CV monotone (au moins à partir d'un certain rang)

CV oscillatoire : exemple : ici la suite $(x_{2p}) \nearrow x^*$ $(p\to+\infty)$ et la suite $(x_{2p+1}) \searrow x^*$ (") au moins à partir d'un certain rang.

c) Cas 3 : exemple de dynamique complexe $\boxed{\lambda\in]3,4[}$

A partir d'une valeur critique $\lambda_1 \simeq 3.2$, on a (au moins) la figure suivante (cf "cascade de Feigenbaum") :

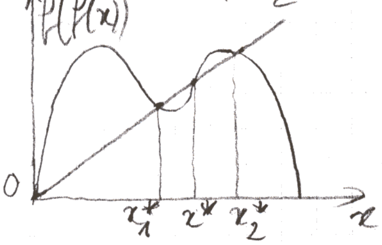


$f(x_1^*) = x_2^*$ et $f(x_2^*) = x_1^*$

[noter que $|f'(x^*)| > 1$].

Alors la suite $(x_{2p}) \underset{(e.g.)}{\longrightarrow} x_1^*$ et $x_{2p+1} \to x_2^*$ (ou l'inverse).

Le graphe de $f\circ f : x \mapsto f(f(x))$ est alors :



$f\circ f$ a 4 points fixes dans $[0,1]$, dont deux stables (localement) : x_1^* et x_2^*. Pour une valeur critique $\lambda_2 > \lambda_1$, $(f\circ f\circ f\circ f)$ a 8 points fixes, dont 4 localement stables, etc....

§2 - Idées sur les ED (équations aux différences) linéaires du second ordre :

On considère l'ED. du second ordre, linéaire :

$$x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_2 x_t = \begin{cases} f(t) \\ 0 \end{cases}, \forall t \in \mathbb{N}. \quad \begin{matrix}(2) \\ (2')\end{matrix}$$

. Clairement, l'ensemble des suites $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$ solutions de (2') est un sous-espace vectoriel de l'e.v. des suites numériques $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$, et cet ensemble E est de dimension 2, car il suffit de deux conditions initiales (C.I.)

(x_0, x_1) donnés (3)

pour déterminer toute suite (x_t) solution de (2') — ou de (2) — et de (3), par récurrence.

. On cherche (encore) des suites $(y_t)_{t\in\mathbb{N}} = r^t$ solutions de (2'). On obtient l'équation caractéristique en reportant $y_t = r^t$ dans (2') :

$\underbrace{r^t}_{\neq 0}(r^2 + a_1 r + a_0) = 0$, d'où $\boxed{r^2 + a_1 r + a_0 = 0}$ (EC)

. Si (EC) a deux racines $\neq$ $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on obtient encore la SG (solution générale) de l'éq. homogène (2') : $\boxed{y_t = \alpha (r_1)^t + \beta (r_2)^t}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

avec l'autre écriture : $y_t = |r_1|^t (A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$,
si $\overline{r_1} = r_2$, et ω = argument de (r_1, r_2)
$\Leftrightarrow y_t = C|r_1|^t \cos(\omega t - \theta_0)$, $t \in \mathbb{N}$,

racine double

et on obtient $y_t = (r)^t(\alpha t + \beta)$ si $r_1 = r_2 = r$.

La stabilité asymptotique quand $t \to +\infty$ équivaut ici à : $|r_1|$ et $|r_2| < 1$