L3 MASS 2006/07. Systèmes dynamiques. TD 2

Exercice 1 *On considère une équation différentielle de type gradient*

$$x' = -V'(x) \tag{1}$$

où $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *désigne une fonction* C^1. *Vérifier graphiquement que dans le cas général les solutions de ce système convergent vers un minimum (local ou global) de* V, *lorsque* t *tend vers l'infini. Vérifier en multipliant les deux membres de l'équation différentielle par* $V'(x)$ *que pour toute solution* $x(.)$ *la fonction* $t \to V(x(t))$ *est bien une fonction décroissante. Est-elle strictement décroissante ? Qu'en déduisez-vous ? Etudier le cas où* $V(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$.

Exercice 2 (Lemme de Gronwall) *Soit* α, β *et* v, *des fonctions continues sur un intervalle* $[a, b] \subset \mathbb{R}$, *avec* $\beta \geq 0$. *On suppose que l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\forall t \in [a, b] \qquad v(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\ v(s)\ ds$$

1. *On note* $w : t \in [a, b] \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par*

$$w(t) = \int_a^t \beta(s)\ v(s)\ ds$$

   Vérifier que l'on a

$$\forall t \in [a, b] \qquad w'(t) \leq \beta(t)\ \alpha(t) + \beta(t)\ w(t)$$

2. *On note* $B : t \in [a, b] \to \mathbb{R}$ *la fonction primitive de* β *définie par*

$$B(t) = \int_a^t \beta(s)\ ds$$

   Vérifier que l'on a

$$\forall t \in [a, b] \qquad (e^{-B} w)'(t) \leq e^{-B(t)} \beta(t)\ \alpha(t)$$

   En déduire que

$$\forall t \in [a, b] \qquad w(t) \leq \int_a^t e^{\int_s^t \beta(r) dr}\ \ \beta(s) \alpha(s) ds$$

3. *Démontrer l'inégalité de Gronwall*

$$\forall t \in [a, b] \qquad v(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t e^{\int_s^t \beta(r) dr}\ \beta(s) \alpha(s) ds$$

Exercice 3 *On considère un système différentiel d'ordre 2*

$$x'' = f(x) \tag{2}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ désigne une fonction localement Lipschitzienne.

1. *Montrer que les solutions constantes sont données par $x(t) = x_0 \in f^{-1}(\{0\})$, et vérifier que l'équation (2) peut s'exprimer sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1 dans le plan euclidien. Montrer qu'il existe localement une unique solution x telle que $x(t_0) = x_0$, et $x'(t_0) = v_0$, où (x_0, v_0) désignent un couple de réel fixés.*
2. *Soit F une fonction primitive de f $(= F')$. Vérifier que sur tout intervalle de temps où x' ne s'annule pas, nous avons*

   $$(2) \Longleftrightarrow \frac{d}{dt} H(x(t), x'(t)) = 0$$

   avec la fonction d'énergie $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

   $$H(x, v) = \frac{1}{2}\ v^2 - F(x)$$

   Vérifier que l'équation (2) est équivalente au système Hamiltonien

   $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \quad (\text{avec} \quad y = \frac{dx}{dt}) \end{cases}$$

Exercice 4 (Équation du pendule linéarisée) *On considère le système différentiel du second ordre*

$$x'' = -a^2\ x \quad \text{avec} \quad a > 0 \tag{3}$$

1. *Déterminer les solutions constantes de (3), et montrer que cette équation différentielle est un système conservatif, plus précisement dont l'intégrale première est donnée par la fonction H définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

   $$H(x, v) = \frac{v^2}{2} + a^2\ \frac{x^2}{2}$$

   Montrer qu'en posant $x' = a\ y$, le couple (x, y) est solution d'un système différentiel du premier ordre que l'on écrira.
2. *Vérifier que localement autour de t_0, les solutions de (3) sont telles que*

   $$[x'(t)]^2 = [x'(t_0)]^2 + a^2\ \left[x(t_0)^2 - x(t)^2\right]$$

3. *Vérifier que les solutions de (3) sont données par intégration directe par la formule*

   $$x(t) = x(t_0)\ \cos(a[t - t_0]) + \frac{x'(t_0)}{a}\ \sin(a[t - t_0])$$

   En déduire que la relation précédente est vérifiée globalement, i.e ; pour tout t.

4. *Discuter le comportement des trajectoires, en fonction des conditions initiales* $(x(t_0), x'(t_0)) = (x_0, v_0) \in (0, \infty)$. *Montrer que les solutions non constantes sont périodiques de période* $T = (2\pi)/a$.

Exercice 5 *Le mouvement d'un pendule simple (sans frottement) de masse* m *suspendu à un fil de longueur* l, *est déterminé par l'équation*

$$\theta'' = -\frac{g}{l}\ \sin\theta \tag{4}$$

Dans la formule précédente, nous avons noté g *la constante d'accélération de la pesanteur. Le paramètre* θ *représente l'angle orienté que fait le pendule avec la verticale. Cet angle étant* 0, *lorsque le pendule est en position verticale avec le point matériel au dessous du point d'attache. L'angle vaut* $\pm\pi$ *si le pendule est en position verticale avec le point matériel au dessus du point d'attache.*

1. *Déterminer les équations du mouvement du couple* $(\theta(t), \omega(t))$, *avec la variable* $\omega(t) = \theta'(t)$, *et décrire les points d'équilibre du système.*
2. *Montrer que (4) est un système Hamiltonien avec la fonction* H *définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par*
$$H(\theta, \omega) = \frac{1}{2}\ ml^2\omega^2 + mlg(1 - \cos\theta)$$
Vérifier que l'Hamiltonien H *est positif, et déterminer ses minima.*
3. *Déterminer le portrait des phases dans* $\mathbb{R}^2$ *du pendule. Autrement dit, déterminer les courbes d'équation* $H(\theta, \omega) = h$, *où* h *désigne une énergie fixée dans* $\mathbb{R}_+$. *On distinguera les lignes d'énergie*
$$1)\quad h = 2mgl \qquad 2)\quad h > 2mgl \quad \text{et} \quad 3)\quad 0 < h \leq 2mgl$$
Décrire qualitativement dans chaque situation les mouvement du pendule.

Exercice 6 (Couplage amortisseur-ressort) *Un amortisseur de voiture est constitué d'un ressort enroulé autour d'un amortisseur. Le premier fournit une force de rappel* $x'' = -k^2\,x$, *et le second une force égale à* $-\alpha v$, *où* $v = x'(t)$ *est la vitesse. Les constantes* k *et* α *sont positives.*
L'équation du mouvement est donc

$$mx'' + \alpha x' + k^2\,x = -mg,$$

où g *est l'accélération de la pesanteur et* m *la masse. Donner la solution générale de cette équation en fonction des conditions initiales* $x(0) = x_0$ *et* $x'(0) = x_1$ *et des constantes* α *et* k. *Discuter l'allure qualitative de la solution en fonction des racines de l'équation caractéristique.*

Exercice 7 (Un exemple économique) *On suppose que la consommation (d'un pays)* $C(t)$ *est liée au revenu* $Y(t)$ *et à son évolution* $Y'(t)$ *par*

$$C(t) = cY(t) - Y'(t), 0 < c < 1,$$

que l'investissement $I(t)$ *correspondant est* $I(t) = \beta C'(t)$*, avec* $\beta > 0$*, et que le bilan total impose*

$$Y(t) = C(t) + I(t) + G,$$

où G *(la dépense totale du gouvernement) est une constante positive Les coefficients* β *et* c *sont respectivement appelés accélérateur et multiplicateur.*
Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $Y(.)$*. Préciser ensuite les régions du plan* (β, c) *qui correspondent à des solutions stables, instables, oscillantes amorties ou amplifiées.*

Exercice 8 Le modèle non linéaire discret de croissance de Solow

1. *Soit* g *une fonction de* I *dans* I*, où* I *est un intervalle fermé de* $\mathbb{R}_+$*. On suppose que* g *est de classe* C^1 *et que sa dérivée vérifie :* $\mid g'(x) \mid \leq c < 1$ *pour tout* $x \in I$*. Montrer que* g *est contractante, i.e. Lipschitzienne de constante* < 1*, de* I *dans* I*. Soit* x_0 *quelconque dans* I*. On construit par récurrence la suite* (x_n) *solution de* $x_{k+1} = g(x_k)$*. Montrer que*
   $\mid x_{k+1} - x_k \mid \leq c^k \mid x_1 - x_0 \mid$.
   En déduire que la suite(x_k) *converge vers* $x \in I$*, et que* x *est l'unique point fixe de* g *dans* I*.*

2. *Le modèle de Solow s'écrit :*

   $$k_{p+1} = \frac{1}{1+n}(sf(k_p) + (1-\delta)k_p) := g(k_p),\ p = 0, 1, ...$$

   où k *est le capital par tête,* $f(k)$ *la production de capital, et où la propension marginale à économiser* s*, le taux de dépréciation* δ *du capital et le taux de croissance* n *de la population sont des constantes positives connues. On suppose que* f *est une fonction croissante, positive, concave, telle que*
   $f(0)) = 0, f'(k) \to +\infty$ *quand* $k \to 0$ *et* $f'(k) \to 0$ *quand* $k \to +\infty$*.* *Etudier les points fixes de* g *sur* $\mathbb{R}+$ *et le comportement de la suite* (k_p) *quand* $p \to +\infty$*.*