L3 MASS 2005/06. Systèmes dynamiques. TD 3[Corrigé]

Exercice 1 *On considère l'équation différentielle dans le plan*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & ax+by \\ \frac{dy}{dt} & = & cx+dy \end{array}\right. \qquad \textit{avec} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R} \quad \text{t.q.} \quad (a+d)^2 > 4\ (ad-bc) \quad (1)$$

1. On pose $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$*. Vérifier que*

$$(1) \Longleftrightarrow \frac{dX}{dt} = A\ X$$

où A *désigne une matrice* (2×2) *que l'on explicitera.*

2. Déterminer les valeurs propres λ_1*, et* λ_2*, de la matrice* A *en fonction de sa trace* $\mathrm{tr}(A)$*, et de son déterminant* $\mathrm{dét}(A)$*.*

3. Soit V_1*, et* V_2 *deux vecteurs propres associés aux valeurs propres* λ_1*, et* λ_2*. Montrer que* (V_1, V_2) *forment une base de* $\mathbb{R}^2$*. Résoudre le système différentiel (1) dans cette base.*

4. Décrire les portraits de phases, et discuter le comportement des solutions, dans les trois cas suivants :

$$1)\ \ \lambda_1 < \lambda_2 < 0 \qquad 2)\ \ 0 < \lambda_1 < \lambda_2 \qquad 3)\ \lambda_1 < 0 < \lambda_2$$

Solution :

1. On a clairement

$$(1) \Longleftrightarrow \frac{dX}{dt} = A\ X \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

2. Le polynôme caractéristique de A est donné par

$$\begin{array}{rcl} p(\lambda) & = & \mathrm{dét}(A-\lambda I) = \mathrm{dét}\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \\ & = & (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = (ad-bc) - \lambda\ (a+d) + \lambda^2 \\ & = & \lambda^2 - \lambda\ \mathrm{tr}(A) + \mathrm{dét}(A) \\ & = & \left(\lambda - \dfrac{\mathrm{tr}(A)}{2}\right) - \dfrac{1}{4} \times \left(\mathrm{tr}(A)^2 - 4\ \mathrm{dét}(A)\right) \end{array}$$

D'après nos hypothèses, nous avons

$$\mathrm{tr}(A)^2 - 4\ \mathrm{dét}(A) = (a+d)^2 - 4\ (ad - bc) > 0$$

Les valeurs propres λ_1, et λ_2, de la matrice A sont donc données par

$$\left(\frac{\mathrm{tr}(A) - |\mathrm{tr}(A)|}{2} <\right)\ \lambda_1 = \frac{\mathrm{tr}(A) - \sqrt{\mathrm{tr}(A)^2 - 4\ \mathrm{dét}(A)}}{2}$$

et

$$\lambda_1 < \lambda_2 = \frac{\mathrm{tr}(A) + \sqrt{\mathrm{tr}(A)^2 - 4\ \mathrm{dét}(A)}}{2}$$

3. Si les vecteurs V_1 et V_2 n'étaient pas indépendants, nous aurions

$$V_1 = \gamma V_2, \quad \gamma \neq 0 \Rightarrow AV_1 = \lambda_1 V_1 = \gamma AV_2 = \lambda_2(\gamma V_2) = \lambda_2 V_1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

On obtiendrait ainsi une contradiction avec le fait que $\lambda_1 < \lambda_2$. On en conclut que le couple de vecteurs (V_1, V_2) forme une base de $\mathbb{R}^2$.

On notera par la suite $\overline{X} = \left[\begin{array}{c} \overline{x} \\ \overline{y} \end{array}\right]$ les coordonnées d'un vecteur X dans la base (V_1, V_2). On rappelle que si X s'écrit

$$X = \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right] = x\ E_1 + y\ E_2$$

dans la base canonique $(E_1, E_2) = \left(\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right]\right)$, et si $V_1 = \left[\begin{array}{c} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{array}\right]$ et $V_2 = \left[\begin{array}{c} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{array}\right]$ désignent les coordonnées de V_1 et de V_2 dans la base (E_1, E_2), on obtient classiquement la formule de changement de base

$$X = P\ \overline{X} \quad \text{avec} \quad P = [V_1, V_2] = \left(\begin{array}{cc} v_{1,1} & v_{2,1} \\ v_{1,2} & v_{2,2} \end{array}\right)$$

L'indépendance entre V_1 et V_2 nous assure que P est inversible

$$\mathrm{dét}(P) = v_{1,1}v_{2,2} - v_{2,1}v_{1,2} \neq 0$$

Dans la base (V_1, V_2), l'opérateur linéaire associé à la matrice A est classiquement repéré par la matrice diagonale $D = P^{-1}AP := \overline{A}$. On a en effet

$$\overline{(AX)} = P^{-1}(AX) = P^{-1}AP\overline{X} = \overline{A}\ \overline{X} \Leftrightarrow \overline{A} = P^{-1}AP$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} AP\overline{X} & = & A[V_1, V_2] \left[\begin{array}{c} \overline{x} \\ \overline{y} \end{array}\right] = A(\overline{x}V_1 + \overline{y}V_2) = \overline{x}\ AV_1 + \overline{y}\ AV_2 \\ & = & \lambda_1\overline{x}\ V_1 + \lambda_2\overline{y}\ V_2 = [V_1, V_2] \left[\begin{array}{c} \lambda_1\overline{x} \\ \lambda_2\overline{y} \end{array}\right] \\ & = & P\left(\begin{array}{cc} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{array}\right)\overline{X} \Longrightarrow \overline{A} = D = \left(\begin{array}{cc} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{array}\right) \end{array}$$

Dans cette base de vecteurs propres (V_1, V_2), le système différentiel s'exprime sous la forme suivante

$$\frac{d\overline{X}}{dt} = P^{-1}\frac{dX}{dt} = P^{-1}AX = P^{-1}AP\overline{X} = \overline{A}\;\overline{X}$$

Autrement dit, nous avons

$$\begin{cases} \frac{d\overline{x}}{dt} & = & \lambda_1\;\overline{x} \\ \frac{d\overline{y}}{dt} & = & \lambda_2\;\overline{y} \end{cases}$$

Les solutions de (1) dans la base (V_1, V_2) sont donc données par

$$\begin{array}{rcl} \overline{x}(t) & = & e^{\lambda_1 t}\;\overline{x}(0) \\ \overline{y}(t) & = & e^{\lambda_2 t}\;\overline{y}(0) \end{array}$$

Dans la base canonique originelle (E_1, E_2), la solution générale est donc donnée par

$$\begin{array}{rcl} X(t) & = & \left[\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array}\right] = P\overline{X}(t) = [V_1, V_2]\left[\begin{array}{c} \overline{x}(t) \\ \overline{y}(t) \end{array}\right] = \overline{x}(t)\;V_1 + \overline{y}(t)\;V_2 \\ & = & [e^{\lambda_1 t}\;\overline{x}(0)]\;V_1 + [e^{\lambda_2 t}\;\overline{y}(0)]\;V_2 \end{array}$$

avec

$$\left[\begin{array}{c} \overline{x}(0) \\ \overline{y}(0) \end{array}\right] = P^{-1}\left[\begin{array}{c} x(0) \\ y(0) \end{array}\right]$$

4. (a) Dans les deux premiers cas 1) et 2), les valeurs propres λ_1 et λ_2 ont le même signe, et l'on a $(\lambda_1 - \lambda_2) < 0$. Dans cette situation, en supposant que les conditions initiales $\overline{x}(0)$, et $\overline{y}(0)$, sont non nulles, nous avons

$$\frac{\overline{x}(t)}{\overline{y}(t)} = \frac{\overline{x}(0)}{\overline{y}(0)}\;e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} = \frac{\overline{x}(0)}{\overline{y}(0)}\;e^{-|\lambda_1-\lambda_2|t} \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

par valeurs positives si $\overline{x}(0)$ et $\overline{y}(0)$ ont le même signe, négatives sinon. Dans ce cas, les trajectoires vérifient aussi

$$\overline{x} = C\;|\overline{y}|^{\lambda_1/\lambda_2}$$

Deux cas de figure peuvent se présenter :

(i) Si les valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ sont toutes deux négatives, l'origine est un *point d'équilibre attractif*. On dit que c'est un *noeud attractif ou un puits*. Dans cette situation, nous avons

$$\lambda_2 < \lambda_1 < 0 \implies \frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 1$$

et dans ce cas, toutes les trajectoires vérifient l'équation $\overline{y}(\overline{x}) = C\ |\overline{x}|^{\lambda_2/\lambda_1}$, avec $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$, donc elles sont tangentes en l'origine à l'axe déterminé par le vecteur propre V_2 associé à la plus petite en valeur absolue des valeurs propres, i.e. à λ_2. Il ya cependant **une** trajectoire exceptionnelle, correspondant à $C = 0$, qui est co-linéaire au vecteur V_1. Les portraits de phases correspondant à ce cas et aux suivants sont décrits dans les Notes de cours.
(ii) Si les valeurs propres $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ sont toutes deux positives, l'origine est *un point d'équilibre répulsif.* On dit aussi que c'est un *noeud répulsif ou une source.* Dans cette situation, nous avons

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \implies 1 < \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

et dans ce cas, quand $t \to -\infty$, toutes les trajectoires vérifient encore $|\overline{y}| = C\ |\overline{x}|^{\lambda_2/\lambda_1}$, avec $\lambda_2/\lambda_1 > 1$, donc elles sont toutes tangentes en l'origine à l'axe déterminé par le vecteur propre V_1 associé à la plus petite des valeurs propres en valeur absolue, i.e. à λ_1, , sauf encore la trajectoire exceptionnelle $C = 0$, qui est co-linéaire à V_1.

(b) Lorsque les valeurs propres sont de signes opposés $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, et si $\overline{x}(0) \neq 0$, nous avons

$$0 \xleftarrow{+\infty \leftarrow t} \overline{x}(t) = e^{-|\lambda_1|t}\ \overline{x}(0) \xrightarrow{t \to -\infty} \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \overline{x}(0) > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad \overline{x}(0) < 0 \end{cases}$$

De même, si $\overline{y}(0) \neq 0$, nous avons

$$0 \xleftarrow{-\infty \leftarrow t} \overline{y}(t) = e^{|\lambda_2|t}\ \overline{y}(0) \xrightarrow{t \to +\infty} \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \overline{y}(0) > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad \overline{y}(0) < 0 \end{cases}$$

Dans cette situation, $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Donc les trajectoires vérifient par

$$\overline{y} = C\ |\overline{x}|^{\lambda_2/\lambda_1} = C\ \frac{1}{|\overline{x}|^{|\lambda_2/\lambda_1|}}$$

On renvoie encore au cours pour le portrait de phases correspondant. On notera pour conclure que l'origine n'est ni stable, ni instable, ni attractive, ni répulsive. On dit dans ce cas de figure que c'est un *col.*

∎

Exercice 2 *Résoudre et analyser la stabilité des équations différentielles suivantes :*

$$\begin{array}{lrcl} 1) & x'' + 5x' + x & = & 0 \\ 2) & x'' + 5x' + 4x & = & 0 \\ 3) & x'' + 4x' + 2x & = & 0 \end{array}$$

Solution :
Les trois systèmes se résolvant de façon analogue, nous donnerons une preuve détaillée uniquement dans le premier cas.

1. On commence par noter que le premier système peut se mettre sous la forme d'un système différentiel du premier ordre dans le plan

$$x'' + 5x' + x = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & y \\ y' & = & -5y - x \end{array} \right. \tag{2}$$

Ainsi, si on pose $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, on obtient

$$(2) \Longleftrightarrow \frac{dX}{dt} = A\ X \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

On note ensuite que

$$\mathrm{tr}(A) = -5 \quad \text{et} \quad \text{dét}(A) = 1$$

On en conclut que les valeurs propres

$$\frac{\mathrm{tr}(A) \pm \sqrt{\mathrm{tr}(A)^2 - 4\ \text{dét}(A)}}{2}$$

de A sont

$$\lambda_1 = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2} < \lambda_2 = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2} < 0$$

Donc l'origine est un noeud attractif (ou encore un puits). Pour résoudre ce système, on calcule les vecteurs propres V_1 et V_2 associés à λ_1 et λ_2. Par exemple le vecteur propre $V_1 = \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix}$ associé à λ_1 est donné par

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix}$$

Autrement dit, il suffit de résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} v_{1,2} & = & \frac{-5-\sqrt{21}}{2}\ v_{1,1} \\ -v_{1,1} - 5v_{1,2} & = & \frac{-5-\sqrt{21}}{2}\ v_{1,2} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow v_{1,2} = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2}\ v_{1,1}$$

Il nous suffit donc de choisir par exemple

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}$$

On procède de même pour $V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$. Il nous reste à calculer l'inverse P^{-1} de la matrice de changement de base

$$P = (V_1, V_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-5-\sqrt{21}}{2} & \frac{-5+\sqrt{21}}{2} \end{pmatrix}$$

On obtient classiquement

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{21}} \times \begin{pmatrix} \frac{-5+\sqrt{21}}{2} & -1 \\ \frac{5+\sqrt{21}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

La solution générale de (2) est donnée par la formule suivante

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{\lambda_1 t}\ \overline{x}(0)\ V_1 + e^{\lambda_2 t}\ \overline{y}(0)\ V_2 \\ &= e^{\frac{-5-\sqrt{21}}{2}\ t}\ \overline{x}(0) \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-5-\sqrt{21}}{2} \end{bmatrix} + e^{\frac{-5+\sqrt{21}}{2}\ t}\ \overline{y}(0) \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-5+\sqrt{21}}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{bmatrix} \overline{x}(0) \\ \overline{y}(0) \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{21}} \times \begin{pmatrix} \frac{-5+\sqrt{21}}{2} & -1 \\ \frac{5+\sqrt{21}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix}$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{1}{\sqrt{21}}[e^{\frac{-5-\sqrt{21}}{2}\ t}\ (\frac{-5+\sqrt{21}}{2}\ x(0) - x'(0))] \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-5-\sqrt{21}}{2} \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{21}}[e^{\frac{-5+\sqrt{21}}{2}\ t}\ (\frac{5+\sqrt{21}}{2}\ x(0) + x'(0))] \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-5+\sqrt{21}}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et la première ligne de cette équation fournit la solution générale $x(t)$ de(2).

2. Le second système peut s'écrire

$$x'' + 5x' + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x' &= y \\ y' &= -5y - 4x \end{cases} \tag{3}$$

Ainsi, si on pose $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, on obtient

$$(3) \Longleftrightarrow \frac{dX}{dt} = A\ X \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

On note ensuite que

$$\mathrm{tr}(A) = -5 \quad \text{et} \quad \mathrm{dét}(A) = 4$$

On en conclut que les valeurs propres

$$\frac{\mathrm{tr}(A) \pm \sqrt{\mathrm{tr}(A)^2 - 4\ \mathrm{dét}(A)}}{2}$$

de A sont données par

$$\lambda_1 = -4 < \lambda_2 = -1 < 0$$

L'origine est à nouveau un noeud attractif (ou encore un puits).
Les vecteurs propres $V_1 = \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix}$ associés à λ_1 sont donnés par l'équation

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1,2} \\ -4v_{1,1} - 5v_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4v_{1,1} \\ -4v_{1,2} \end{bmatrix}$$

Ces deux équations sont encore proportionnelles. On choisit par exemple

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix},$$

Det même ¨

$$V_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

L'inverse P^{-1} de la matrice de changement de base

$$P = (V_1, V_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

est maintenant

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

La solution générale de (3) est donc donnée par

$$X(t) \quad = \quad [e^{-4t}\ \overline{x}(0)] \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} + [e^{-t}\ \overline{y}(0)] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{bmatrix} \overline{x}(0) \\ \overline{y}(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(x(0) + y(0))/3 \\ (4x(0) + y(0))/3 \end{bmatrix}$$

D'où on déduit finalement

$$x(t) \quad = \quad -\frac{e^{-4t}}{3}\ (x(0) + x'(0)) + \frac{e^{-t}}{3}\ (4x(0) + x'(0))$$

3. Le dernier système peut s'écrire

$$x'' + 4x' + 2x = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & y \\ y' & = & -4y - 2x \end{array} \right. \tag{4}$$

Ainsi, si on pose $X = \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right]$, on obtient

$$(4) \Longleftrightarrow \frac{dX}{dt} = A\ X \quad \text{avec} \quad A = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{array} \right)$$

On note ensuite que

$$\text{tr}(A) = -4 \quad \text{et} \quad \text{dét}(A) = 2$$

On en conclut que les valeurs propres

$$\frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4\ \text{dét}(A)}}{2}$$

de A sont

$$\lambda_1 = -(2 + \sqrt{2}) < \lambda_2 = -(2 - \sqrt{2}) < 0$$

L'origine est encore un noeud attractif (ou encore un puits).
Les vecteurs propres V_1 et V_2 deviennent

$$V_1 = \left[\begin{array}{c} 1 \\ -(2 + \sqrt{2}) \end{array} , \right]$$

et

$$V_2 = \left[\begin{array}{c} 1 \\ -(2 - \sqrt{2}) \end{array} \right]$$

L'inverse P^{-1} de la matrice de changement de base

$$P = (V_1, V_2) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -(2 + \sqrt{2}) & -(2 - \sqrt{2}) \end{array} \right)$$

s'écrit

$$P^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \left(\begin{array}{cc} -(2 - \sqrt{2}) & -1 \\ (2 + \sqrt{2}) & 1 \end{array} \right)$$

La solution générale de (4) est donc donnée par la formule suivante

$$X(t)$$

$$= [e^{-(2+\sqrt{2})t}\ \overline{x}(0)] \left[\begin{array}{c} 1 \\ -(2 + \sqrt{2})) \end{array} \right] + [e^{-(2-\sqrt{2})t}\ \overline{y}(0)] \left[\begin{array}{c} 1 \\ -(2 - \sqrt{2}) \end{array} \right]$$

avec

$$\begin{bmatrix} \overline{x}(0) \\ \overline{y}(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \begin{pmatrix} -(2-\sqrt{2}) & -1 \\ (2+\sqrt{2}) & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -\frac{(\sqrt{2}-1)}{2}\ x(0) - \frac{y(0)}{2\sqrt{2}} \\ \frac{(\sqrt{2}+1)}{2}\ x(0) + \frac{y(0)}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

En regroupant les terms, on obtient finalement

$$x(t)$$
$$= e^{-2t} \times \left[x(0)\ \cosh(\sqrt{2}t) + \left(\sqrt{2}x(0) + \frac{x'(0)}{\sqrt{2}} \right)\ \sinh(\sqrt{2}t) \right]$$

■

Exercice 3 *1) Résoudre et étudier la stabilité des équations différentielles suivantes*

$$x'' = d\ x' + c\ x \quad \text{avec} \quad (c \wedge d) > 0$$

2) On suppose maintenant $c = 0, d \geq 0$. En cherchant une solution particulière, donner la solution générale de l'équation avec second membre

$$x'' = d\ x' + e^{rt}.$$

En fonction des valeurs de d, on discutera suivant que r est on n'est pas racine de l'équation caractéristique associée.

Solution :
1) On commence par noter que le premier système peut se mettre sous la forme d'un système différentiel du premier ordre dans le plan

$$x'' = d\ x' + c\ x \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & y \\ y' & = & d\ y + c\ x \end{array} \right. \tag{5}$$

Ainsi, si on pose $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, on obtient

$$(5) \Longleftrightarrow \frac{dX}{dt} = A\ X \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{pmatrix}$$

On note ensuite que

$$\text{tr}(A) = d \quad \text{et} \quad \text{dét}(A) = -c$$

On en conclut que les valeurs propres

$$\lambda = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4\ \text{dét}(A)}}{2} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 + 4c}}{2}$$

de A sont

$$\lambda_1 = \frac{d}{2}\left(1 - \sqrt{\left(1 + \frac{4c}{d^2}\right)}\right) < 0 < \lambda_2 = \frac{d}{2}\left(1 + \sqrt{\left(1 + \frac{4c}{d^2}\right)}\right)$$

Elles sont réelles et de signes opposés. Donc l'origine est un *col.*

Les vecteurs propres V_1 et V_1 sont encore

$$V_i = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \end{bmatrix},$$

$i = 1, 2$. Les valeurs propres λ_1 et λ_2 étant distinctes, les vecteurs (V_1, V_2) forment une base du plan. L'inverse de la matrice de changement de base $P = [V_1, V_2]$ est donnée par la formule

$$P^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \times \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

La solution générale de (4) est donc

$$\begin{aligned} & X(t) \\ & = [e^{\lambda_1 t}\ \overline{x}(0)] \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1) \end{bmatrix} + [e^{\lambda_2 t}\ \overline{y}(0)] \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \overline{x}(0) \\ \overline{y}(0) \end{bmatrix} &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \times \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\ x(0) - \frac{y(0)}{\lambda_2-\lambda_1} \\ -\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\ x(0) + \frac{y(0)}{\lambda_2-\lambda_1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned} & x(t) \\ & = [e^{\lambda_1 t}\ \overline{x}(0)] + [e^{\lambda_2 t}\ \overline{y}(0)] \\ & = e^{\lambda_1 t}\ \left(\tfrac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\ x(0) - \tfrac{x'(0)}{\lambda_2-\lambda_1}\right) + e^{\lambda_2 t}\ \left(-\tfrac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\ x(0) + \tfrac{x'(0)}{\lambda_2-\lambda_1}\right) \\ & = \frac{\lambda_2\ e^{\lambda_1 t} - \lambda_1\ e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \times x(0) + \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \times x'(0) \end{aligned}$$

2) On a donc

$$x" - dx' = e^r t.$$

La solution générale (SG) de l'équation avec second membre (ou inhomogène) est somme de la solution générale de l'équation sans scond membre et d'une solution particulière (SP) de l'équation inhomogène. Si $d > 0$, la SG de léquation homogène est évidemment

$$x(t) = A + Be^d t,$$

puisqu'alors l'équation caractéristique :

$$P(r) := r^2 - dr$$

a deux racines évidentes $r_1 = 0 < r_2 = d$. Si $d = 0$, $r = 0$ est racine double et donc la SG devient $x(t) = At + B$. Cherchons donc une SP y de l'équation inhomogène, d'abord sous la forme $y(t) = Ce^r t$. On obtient nécessairement

$$Ce^r t(r^2 - dr) = P(r)e^r t = e^r t.$$

Donc si $P(r) \neq 0$, i.e. si $r \neq 0$ et$r \neq d$, ceci détermine de manière unique C, et donc une SP $y(t) := \frac{e^r t}{P(r)}$. Si maintenant $d > 0$ et si $r = 0$ ou d, alors r est racine simple de l'équation caractéristique. On cherche alors $y(t) = De^r t$. En reportant dans l'EDO, on obtient :

$$De^r t(t(r^2 - dr) + 2r - d) = De^r t(tP(r) + P'(r)) = De^r tP'(r) = e^r t$$

, ce qui détermine d de manière unique, car $P(r) = 0$, mais $P'(r) \neq 0$. Enfin, si $r = d = 0$, alors r est racine double. On cherche alors une SP $y(t) = Et^2 e^r t$. Montrer qu'alors E est déterminée de manière unique. ■

Exercice 4 *Étudier la stabilité de l'origine pour les équations différentielles dans le plan suivantes*

$$1) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \frac{dx}{dt} & = & 2x \\ \frac{dy}{dt} & = & y \end{array} \right. \qquad 2) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \frac{dx}{dt} & = & x - y \\ \frac{dy}{dt} & = & -2x \end{array} \right. \qquad 3) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \frac{dx}{dt} & = & 2x + y \\ \frac{dy}{dt} & = & -y \end{array} \right.$$

Solution :
Si on pose $X = \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right]$, ces équations différentielles dans le plan s' expriment sous la forme suivante

$$\frac{dX}{dt} = A\ X$$

avec selon les cas :

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad 3)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Dans le premier cas, les valeurs propres de A

$$0 < \lambda_1 = 1 < \lambda_2 = 2$$

sont toutes deux positives. Dans cette situation, l'origine est un un point d'équilibre répulsif (ou encore un noeud répulsif ou une source).

2. Dans les autres cas, les valeurs propres sont données par la formule

$$\frac{\operatorname{tr}(A) \pm \sqrt{\operatorname{tr}(A)^2 - 4 \text{ dét}(A)}}{2}$$

Pour les équations différentielles (2) ou (3), nous avons

$$\operatorname{tr}(A) = 1 \quad \text{et} \quad \text{dét}(A) = -2$$

Dans les deux cas, les valeurs propres sont donc données par

$$\lambda_1 = -1 < 0 < \lambda_2 = 2$$

et l'origine est un col.

■