L3 MASS 2006/07. Systèmes dynamiques. TD 3

Exercice 1 *On considère l'équation différentielle dans le plan*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & ax + by \\ \frac{dy}{dt} & = & cx + dy \end{array} \right. \quad \textit{avec} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad \text{t.q.} \quad (a+d)^2 > 4\ (ad - bc) \quad (1)$$

1. *On pose* $X = \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right]$. *Vérifier que*

$$(1) \Longleftrightarrow \frac{dX}{dt} = A\ X$$

   où A *désigne une matrice* (2×2) *que l'on explicitera.*

2. *Déterminer les valeurs propres* λ_1, *et* λ_2, *de la matrice* A *en fonction de sa trace* $\mathrm{tr}(A)$, *et de son déterminant* $\mathrm{dét}(A)$.
3. *Soit* V_1, *et* V_2 *deux vecteurs propres associés aux valeurs propres* λ_1, *et* λ_2. *Montrer que* (V_1, V_2) *forment une base de* $\mathbb{R}^2$. *Résoudre le système différentiel (1) dans cette base.*
4. *Décrire les portraits de phases, et discuter le comportement des solutions, dans les trois cas suivants :*

$$1)\ \ \lambda_1 < \lambda_2 < 0 \qquad 2)\ \ 0 < \lambda_1 < \lambda_2 \qquad 3)\ \lambda_1 < 0 < \lambda_2$$

Exercice 2 *Résoudre et analyser la stabilité des équations différentielles suivantes :*

$$\begin{array}{lrcl} 1) & x'' + 5x' + x & = & 0 \\ 2) & x'' + 5x' + 4x & = & 0 \\ 3) & x'' + 4x' + 2x & = & 0 \end{array}$$

Exercice 3 *1) Résoudre et étudier la stabilité de l'équation différentielle suivante :*

$$x'' = d\ x' + c\ x \quad \text{avec} \quad c, d > 0$$

2) On suppose maintenant $c = 0, d \geq 0$. *En cherchant une solution particulière, donner la solution générale de l'équation avec second membre*

$$x'' = d\ x' + e^{rt}.$$

En fonction des valeurs de d, *on discutera suivant que* r *est on n'est pas racine de l'équation caractéristique associée.*

Exercice 4 *Etudier la stabilité de l'origine pour les équations différentielles suivantes*

$$1) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & 2x \\ \frac{dy}{dt} & = & y \end{array} \right. \qquad 2) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & x - y \\ \frac{dy}{dt} & = & -2x \end{array} \right. \qquad 3) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & 2x + y \\ \frac{dy}{dt} & = & -y \end{array} \right.$$