Université de Nice Sophia-Antipolis. L3 Mass,
Sytèmes dynamiques,
Année 2004-2005. Examen du 04/09/05.

Durée : 1 Heure 30. Documents autorisés : une feuille manuscrite recto-verso.

1. Tracer le graphe des fonctions suivantes

$$f_1(x) = x^3 - 1 \tag{1}$$
$$f_2(x) = e^{-x^2} - e^{-1} \tag{2}$$

On rappelle que $e\#2.7$. Dans chaque cas, dire quels sont les points d'équilibre de l'équation différentielle correspondante

$$\dot{x} = f(x)\,, f := f_i\,,\ i = 1, 2,$$

et préciser leur stabilité.

2. On considère l'équation différentielle (EDO)

$$\ddot{x} - 2\,\dot{x} - 3\,x = 1. \tag{3}$$

Chercher une solution particulière constante de cette équation. Ecrire l'équation sans second membre associée (4) et en donner la solution générale, à l'aide de l'équation caractéristique. En déduire la solution générale de (3).

3. Réécrire l'EDO (2) sous forme d'un système différentiel (du premier ordre) linéaire

$$\dot{X} = A\,X.$$

Donner les composantes de deux vecteurs propres linéairement indépendants V et W de la matrice A puis, si c'est possible (justifier), écrire le système diagonal associé. Préciser les formules de changement de base et expliciter la solution du système.

4. On considère le système non linéaire suivant

$$\dot{x} = y \tag{4}$$
$$\dot{y} = -V(x), \tag{5}$$

où V est une fonction donnée.

(i) On pose $H(x, y) := \frac{1}{2}y^2 + V(x)$.Vérifier que le système (4) est Hamiltonien et calculer la dérivée totale $\frac{d}{dt}(H(x(t), y(t))$, où $(x(t), y(t))$ est une solution quelconque de ce système. Qu'en déduisez-vous ?

(ii) Maintenant, $V(x) := V_0(x) + C$, avec $V_0(x) := e^{-x^2}$, et C une constante arbitraire. Tracer deux courbes $z = -V_0(x) + C$, par exemple une pour $C > 0$, et une pour $-1 < C < 0$. Dans quels cas est-ce que la partie $z \geq 0$ de la courbe est bornée ? En remarquant que $H(x, y)$ est constante le long des trajectoires, et que $z := \frac{1}{2}y^2$ doit évidemment être positif ou nul, montrez que les courbes d'équation $H(x, y) = H(x_0, y_0)$ peuvent être soit des courbes fermées et bornées soit des courbes infinies, suivant le signe de $H(x_0, y_0)$. Dans quel cas pensez-vous que ce système admet des solutions périodiques ? Expliquer pourquoi.