Université de Nice Sophia-Antipolis. L3 Mass,
Sytèmes dynamiques,
Année 2005-2006. Contrôle du 01/03/06 : Corrigé

Durée : 40 mn. Documents autorisés : une feuille manuscrite recto-verso.

1. Tracer le graphe des fonctions suivantes

$$f_1(x) = x(x-1)(x+2) \quad (1)$$
$$f_2(x) = x^2 - 1 \quad (2)$$

Dans chaque cas, dire quels sont les points d'équilibre de l'équation différentielle correspondante

$$\dot{x} = f(x)\,, f := f_i\,,\ i = 1, 2,$$

et préciser leur stabilité.

Solution :
Le graphe de f_1 s'étudie de manière précise à l'aide d'un tableau de variations : $f^1(x) = x(x^2+x-2) = x^3 + x^2 - 2x$,donc

$$f_1'(x) = 3x^2 + 2x - 2.$$

Les racines de f_1' sont donc $y = \frac{-1\pm\sqrt{7}}{3} \sim \frac{-1\pm 2.6}{3}$. Donc f_1 est croissante entre $-\infty$ et $y_2 \sim -1.2$ et pour $y > y_2 \sim +0.5$, et décroissante entre y_1 ety_2. de plus f_1 s'annule évidemment pour $x = -2, 0$ et 1. Elle est donc négative pour $x < -2$ et pour $0 < x < 1$, et positive pour $-2 < x < 0$ et pour $x > 1$. On ne trace pas ici son graphe, qu'on laisse en exercice (facile). On peut affirmer que 0 est un équilibre stable, et que -2 et1 sont instables.

Le graphe de f_2 se déduit de celui de $x \mapsto x^2$ par une translation évidente. Donc les racines de f_2 sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$, f_2 est ≤ 0 entre les racines et positive en dehors de $[-1, 1]$. Donc x_1 est un point d'équilibre stable et x_2 est instable. On peut ausssi, mais ce n'est pas nécessaire, tracer les courbes intégrales $t \mapsto x(t)$ et aboutir à la même conclusion.

2. Soit $Y(t)$ le revenu national à l'instant t, $C(t)$ la consommation, $0 < c < 1$ la propension marginale à consommer, $\lambda > 0$ un coefficient d'ajustement et $A > 0$ une constante. On suppose que

$$\dot{Y}\,(t) := \frac{dY}{dt}(t) = \lambda\,(C(t) - Y(t))\,,$$

avec

$$C(t) = c\,Y(t) + A.$$

En déduire l'équation différentielle vérifiée par la fonction $Y(t)$. Etudier l'état d'équilibre $Y(t) \equiv Y_e \equiv$ constante, et tracer le graphe des solutions en fonction du temps. Quelle est la limite de $Y(t)$ quand $t \to +\infty$? Dans quel sens varie Y_e quand c augmente, en restant dans $[0, 1]$?

Solution :
On déduit des équations que

$$\dot{Y}\,(t) + \lambda\,(1-c)Y(t) = \lambda A.$$

On résout donc explicitement cette EDO d'ordre 1, linéaire, à coefficients constants. L'équation avec second membre admet une solution constante (un état d'équilibre) évident(e) : $Y(t) \equiv Y_e := \frac{A}{1-c}$, et l'équation caractéristique associée à l'équation homogène associée est $r + \lambda\,(1-c) = 0$. Donc la solution générale (SG) de l'équation complète est :

$$Y(t) = Y_e + (Y(0) - Y_e)e^{-\lambda\,(1-c)t}.$$

Comme $\lambda\ (1-c) < 0$, Y_e est un équilibre asymptotiquement stable : pour toute condition initiale, $Y(t) \to Y_e$ quand $t \to +\infty$, et son graphe est facile à tracer (exercice). Enfin, pour $0 < c < 1$, le revenu à l'équilibre $Y - e = \frac{A}{1-c}$ est une fonction croissante de c.

3. On considère l'équation différentielle (EDO)

$$\ddot{x} + 2\,\dot{x} + 2\,x = 10. \tag{3}$$

Chercher une solution particulière constante x_e de cette équation. Ecrire l'équation sans second membre associée $(3')$ et en donner la solution générale, à l'aide de l'équation caractéristique. En déduire la solution générale de (**??**) et le comportement de $x(t) - x_e$ quand $t \to +\infty$.

Solution :
Ici encore, on a une solution particulière constante $x(t) \equiv x_e := 5$. Ensuite l'équation caractéristique associée à l'équation sans second membre est

$$r^2 + 2r + 2 = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = -4$ et les racines sont donc dsitinctes et complexes conjuguées : $r_1 = -1 + i = \overline{r_2}$. Comme on l'a vu en TD, il est plus facile de décomposer ces racines en partie réelle et partie imaginaire, et d'écrire la solution de l'EDO sans second membre sous la forme :

$$x(t) = e^{-t}\ (Acost + \ Bsint) = \sqrt{A^2 + B^2}\ e^{-t}\ cos(t - \theta_0),$$

avec $cos(\theta_0) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$.
On en déduit la SG de l'équation (3) en ajoutant la constante $x_e = 5$. Comme la partie réelle de $r_i, i = 1, 2$, est négative, x_e est encore asymptotiquement stable : pour toute conditions initiales, $x(t) - x_e$ tend vers 0 quand $t \to +\infty$, en oscillant autour de 0 à cause du terme en cosinus, comme pour le cas du ressort avec amortisseur, cf TD 2.

4. Réécrire l'EDO $(3')$ sous forme d'un système différentiel (du premier ordre) linéaire

$$\dot{X} = A\,X.$$

Calculer les valeurs propres de la matrice A et donner si c'est possible les composantes de deux vecteurs propres linéairement indépendants V et W de la matrice A.

Solution :
On pose comme d'habitude $X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}\,(t) \end{pmatrix}$.
On obtient donc le système différentiel linéaire

$$\dot{X} = AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} \dot{X_1} \\ \dot{X_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont les racines de l'équation caractéristique $\text{dét}(A - \lambda\, I) := P(\lambda) := \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$. on retrouve évidemment $\lambda_i = r_i = 1 \pm 1$, $i = 1, 2$.
Ces deux valeurs propres étant distinctes, les vecteurs propres associés forment une base de $\mathbf{R^2}$, i.e. la matrice A est diagonalisable. Comme en TD, on cherche $V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$ solution de $AV = \lambda V$. Classiquement, V_1 et V_2 vérifient deux équations proportionnelles, dont la plus simple est ici la première : $V_2 = \lambda V_1$, car la première ligne de A est : $(0, 1)$. On obtient donc une base de vecteurs propres de A en choisissant e.g. $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 = 1 + i \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 = 1 - i \end{pmatrix}$