Université de Nice Sophia-Antipolis. L3 Mass,
Systèmes dynamiques,
Année 2004-2005. Examen du 04/05/05.

Durée : 1 Heure. Documents autorisés : une feuille manuscrite recto-verso.

1. Tracer le graphe des fonctions suivantes

$$f_1(x) = x^2 - 1 \quad (1)$$
$$f_2(x) = e^{-x^2} - e^{-1} \quad (2)$$

On rappelle que $e\#2.7$. Dans chaque cas, dire quels sont les points d'équilibre de l'équation différentielle correspondante

$$\dot{x} = f(x)\,, f := f_i\,,\ i = 1, 2,$$

et préciser leur stabilité.

2. On considère l'équation différentielle (EDO)

$$\ddot{x} + 2\,\dot{x} + x = 0.$$

Donner la solution générale de cette équation, à l'aide de l'équation caractéristique.

3. Réécrire cette EDO sous forme d'un système différentiel (du premier ordre) linéaire

$$\dot{X} = A\,X.$$

Préciser les vecteurs propres de A et donner les composantes d'un vecteur W_2 orthogonal à un vecteur propre quelconque W_1, en fonction de celles de W_1. Si c'est possible écrire le système diagonal associé, sinon W_1 expliciter une base de $\mathbf{R^2}$ qui contienne W_1. Préciser les formules de changement de base et expliciter la solution du système.

3. On considère le système de Lotka-Volterra, dans lequel toutes les constantes sont positives :

$$\dot{x} = axy - bx \quad (3)$$
$$\dot{y} = -cxy + dy \quad (4)$$

(i) Au vu des signes des coefficients, est-ce que x désigne les prédateurs et y les proies, ou l'inverse ?

(ii) On pose $H(x, y) := ay + cx - bLogy - dLogx$. Calculer la dérivée totale $\frac{d}{dt}(H(x(t), y(t))$, où $x(t), y(t))$ est une solution quelconque de ce système. Qu'en déduisez-vous ?

(iii) Pensez-vous que ce système admet des solutions périodiques ? Si oui, expliquer pourquoi.