Ch. 2. Equations différentielles.

§1 – Introduction :

. Jusqu'ici, on a considéré uniquement des phénomènes en temps discret $t \in \mathbb{N} = \{0, 1, \dots, n, \dots\}$ (ou $t = t_n = n\,\Delta t$). Maintenant, le temps est une variable continue : $t \in \mathbb{R}_+$ (ou parfois $t \in \mathbb{R}$: le passé et l'avenir).

. Par exemple une ED (équation aux différences) du type :

$$x_{t+1} = h(x_t) \underset{(\text{exemple})}{:=} x_t + \Delta t\, f(x_t) \qquad \text{(ED)}\ (1_d)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{x_{t+1} - x_t}{\Delta t} = f(x_t)$$

va devenir : $\dot{x}(t) := x'(t) := \frac{dx}{dt}(t) = f(x(t))$ (EDO)

(équation différentielle ordinaire)

. On parle alors d'une EDO d'ordre 1 :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \qquad (1)$$

d'ordre 2 :

$$\ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t)), \text{ etc...} \qquad (2)$$

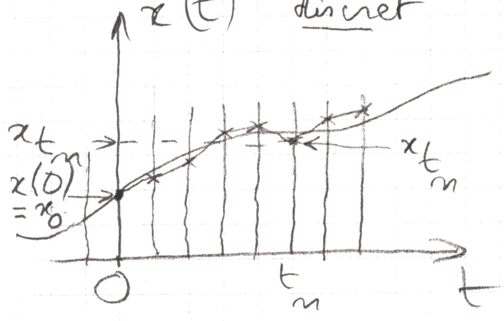
. On dit que cette EDO est autonome (indépendante du temps) si $f(t, x(t)) \equiv f(x(t))$, i.e. $f(t,x) \equiv f(x)$ (1_a)

ou $f(t, x(t), \dot{x}(t)) \equiv f(x(t), \dot{x}(t))$, i.e. $f(t, x_1, x_2) \equiv f(x_1, x_2)$, (2_a)

... autrement dit si le temps n'intervient pas explicitement au second membre de l'E.D.O. : l'évolution du système est endogène.

• **Précisions** : . e.g. dans (1), $\dot{x}(t)$ = dérivée de x / à t $:= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t \pm \Delta t) - x(t)}{\pm \Delta t}$: on voit que quand $\Delta t \to 0$, l'ED, ou équation aux différences finies (1_d) "tend vers l'EDO (1_a) quand $\Delta t \to 0_+$" :

discret



"dans les bons cas (...)", la solution de l'E.D. : $(x_t)_{t \in \mathbb{N}}$ tend vers la solution de l'E.D.O qui vérifie la même condition initiale : $x(0) = x_0$ donné

⚠ . au second membre de (1), la fonction de deux variables $f(t, x)$ est définie $\forall t, \forall x$ et pas seulement pour $x = x(t)$ = une solution de l'EDO (1). De même, au second membre de (2), $f(t, x_1, x_2)$ est définie $\forall t, \forall x_1, \forall x_2$ ...

. comme pour les (ED), une (EDO) a en général une infinité de solutions : il faut $\left\{ \begin{array}{l} \text{une} \\ \text{deux} \\ \ldots \end{array} \right\}$ condition(s) initiale(s) (C.I.) pour déterminer une unique solution.

§2. E.D.O. non linéaires du 1er ordre :

. **Thm 1** : Cauchy-Lipschitz. On considère le pb à condition initiale (CI) (ou "Pb de Cauchy")

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) & (EDO) & (1) \\ x(t_0) = x_0 & (CI) & (CI_1) \end{array} \right.$$

On suppose que f est continue / au couple (t, x)

et que $\underline{f \text{ est lipschitzienne } / \text{à } x, \text{ de constante } L}$ 3

$\forall t$, on trace le graphe de $x \mapsto f(t,x)$: alors la pente de toute $\left\{\begin{matrix}\text{sécante}\\ \text{tangente}\end{matrix}\right.$ ou $\left.\right\}$ à ce graphe est majorée par une constante : $\underline{\underline{L}}$ indépendante de la $\left\{\begin{matrix}\text{sécante}\\ \text{tangente}\end{matrix}\right\}$ considérée.

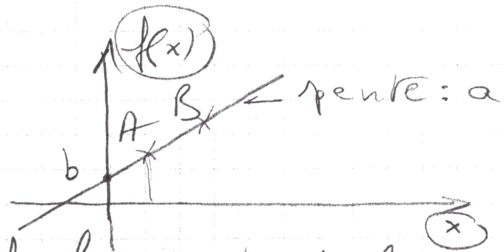
Alors $\underline{\exists \text{ une unique solution}}$ $\{t \mapsto x(t)\}$ du Pb $\left|\begin{matrix}(1)\\ (CI_1)\end{matrix}\right\}$, et soit cette solution est définie $\forall t \geq 0$ $(\leq)$

soit elle "explose" en temps fini : $|x(t)| \xrightarrow[(t \to t^*)]{} +\infty$, soit le second membre $f(t, x(t))$ cesse d'être défini quand $t \to t^* \begin{matrix}\leq +\infty\\ > -\infty\end{matrix}$.

$\underline{\text{Dém}}$. admise.

. $\underline{\text{Illustrations}}$:

$\underline{\text{Ex. 1}}$: $f(t,x) = f(x) = ax + b$

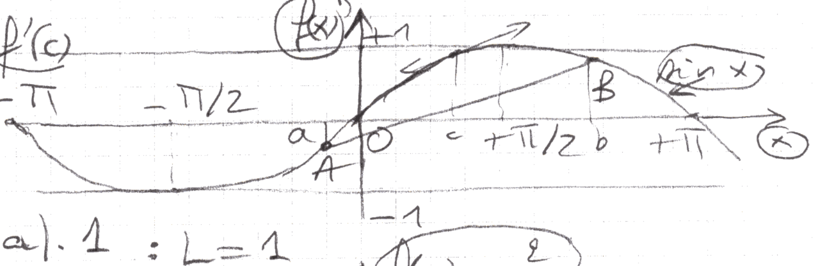


$\forall$ A, B $\in$ graphe de f, la pente de la sécante AB est $= L = a$: $\underline{f \text{ est lipschitzienne}}$ $\underline{/\text{à } x, \text{ de } c^{te} \; L = a}$

$\underline{\text{Ex. 2}}$: $f(t,x) = f(x) = \sin x \Rightarrow |f'(x)| = |\cos x| \leq 1$

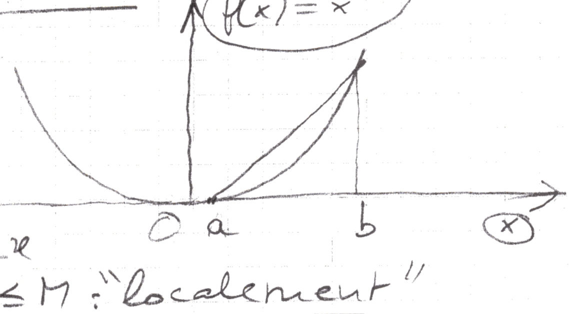
$f(b) - f(a) = (b-a)\underline{f'(c)}$

Accroissements finis



$\Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq |b-a| \cdot 1$: $\underline{L = 1}$

$\underline{\text{Ex. 3}}$: $f(t,x) = f(x) = x^2$



$\underline{\text{Si}}$ $a, b \in [-M, +M]$,

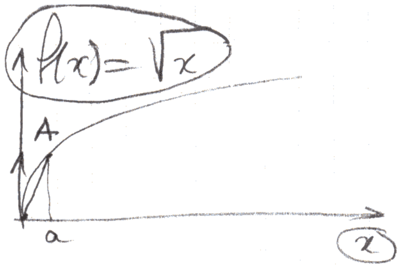
alors $|f'(x)| = |2x| \leq 2M$:

$\underline{f \text{ est lipschitzienne } / \text{à } x}$

$\underline{\text{de } c^{te} \; L = 2M}$, $\underline{\text{pour } |x| \leq M}$: "*localement*"

Par contre, la pente d'une $\left\{\begin{matrix}\text{sécante}\\ \text{tangente}\end{matrix}\right\} \to \pm\infty$ quand $|x| \to +\infty$

Ex.4 : $f(t,x) = f(x) = \sqrt{x}$



la pente d'une sécante OA est : $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{0}}{a-0} = \dfrac{1}{\sqrt{a}} \to +\infty$ $(a \to 0_+)$.

Donc f n'est pas lipschitzienne au voisinage de $x=0$.

- Solutions correspondantes :

→ Ex.1 : cas linéaire : $\dot{x}(t) = a\,x(t) + b$

$$\Leftrightarrow \boxed{\dot{x} - a x = b} \qquad (1)$$

(1) est une EDO d'ordre 1, linéaire, à coeff^ts constants, inhomogène. Alors l'éq. homogène associée est : $\boxed{\dot{y} - a y = 0.}$ (1')

Thm 2 :

1) La solution générale (SG) de (1) est la somme d'une solution particulière (SP) de l'éq. inhomogène (1) et de la SG de l'éq homogène (1')

2) L'ensemble des fonctions $\{t \mapsto y(t)\}$ solutions de (1') est un espace vectoriel. Il est de dimension 1 : la SG de (1') est proportionnelle à une solution de la forme $\{t \mapsto y(t) = e^{\lambda t}\}$. On détermine λ par l'équation caractéristique

$$\boxed{\lambda - a = 0} \qquad (EC) :$$

Donc la SG de (1') est : $y(t) = \alpha e^{at}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

3) Si le second membre de (1) est constant, et si $a \neq 0$, $\exists$ une SP de (1) : $x(t) \equiv x_e = c^{te} = \dfrac{b}{a}$: x_e est un état d'équilibre pour (1)

Thm 2 (suite) :

Alors la SG de (1) est $x(t) = \frac{b}{a} + \alpha e^{at}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$

on détermine α par la C.I. $x(0) = x_0 = \frac{b}{a} + \alpha . 1$.
Enfin l'équilibre $x_e = \frac{b}{a}$ est asymptotiquement stable, et même globalement stable : toute solution $x(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} x_e = \frac{b}{a}$, ssi $a < 0$, cf p8.

4) si $a = 0$, alors il n'y a pas de solution constante si $b \neq 0$: l'EDO est alors $\dot{x}(t) = b \Leftrightarrow x(t) = x_0 + bt$,
et $|x(t)| \underset{(t \to +\infty)}{\longrightarrow} +\infty$

Noter que (EC) est la même que pour une ED linéaire homogène à coeffts constants, mais pour une (ED) on cherchait $\boxed{y_t = (\lambda)^t = e^{t \operatorname{Log} \lambda}}$,
alors qu'ici on cherche : $\boxed{y(t) = e^{\lambda t}}$

• Donc – cf Ch 1 – l'ED : $\boxed{x_{t+1} - a x_t = b}$
a pour SG : $x_t = \frac{b}{1-a} + \alpha (a)^t$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
et x_e est globalement stable ssi $|a| < 1$
$\Leftrightarrow \operatorname{Log} |a| < 0$

• Ici, l'EDO $\boxed{\dot{x} - a x = b}$
a pour SG : $x(t) = \frac{b}{a} + \alpha e^{at}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

et x_e est globalement stable ssi $a < 0$.

→ Ex. 2 : La SG de l'EDO non linéaire $\boxed{\dot{x} = \sin x \quad (2)}$
vérifie $\frac{dx}{dt} = \sin x \Leftrightarrow \frac{dx}{\sin x} = dt$

$\Leftrightarrow \frac{\sin x \, dx}{\sin^2 x} = \frac{d(-\cos x)}{1 - \cos^2 x} = dt \Leftrightarrow t - t_0 = \operatorname{Argth}(-\cos x) - \operatorname{Argth}(-\cos x_0)$

$\Leftrightarrow -\cos x = \operatorname{th}(t - t_0 + \operatorname{Argth}(-\cos x_0)) \ldots$

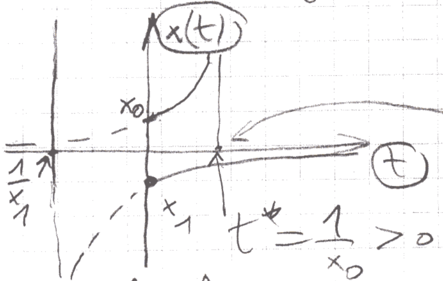
Autrement dit, la SG de l'EDO non linéaire (2) est plus difficile à expliciter, mais elle est <u>unique</u>, et <u>définie pour tout temps</u> : on dit que <u>c'est une solution globale de (2)</u>.

→ <u>Ex. 3 :</u> Au contraire, <u>une solution</u> de <u>l'éq. de Riccati</u> $\boxed{\dot{x} = x^2}$ (3)

<u>peut exploser en temps fini</u> : en effet,

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{+1}{x(t)}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x(t)} = \frac{1}{x_0} - t \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t}$$



⇒ <u>2 cas, suivant le signe de $x(0)$</u>

- si $x_0 > 0$, $x(t) \underset{t \to t^*_-}{\longrightarrow} +\infty$

<u>explosion en temps fini</u> $t^* = \frac{1}{x_0} > 0$

<u>Rappel : f n'est que localement Lipschitzienne</u>

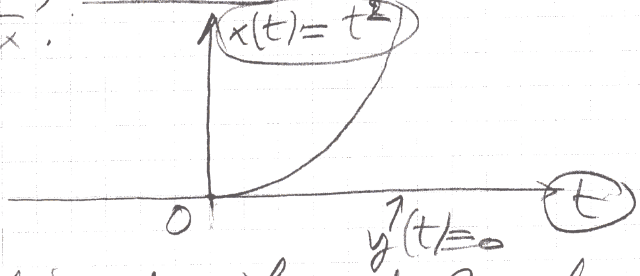
- si $x(0) = x_1 < 0$, $x(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

l'explosion a eu lieu dans le passé pour $t = t^* = \frac{1}{x_1} < 0$.

→ <u>Ex. 4 :</u> $\boxed{\dot{x} = 2\sqrt{x}}$ (4). Alors $f(x) = 2\sqrt{x}$ n'est pas Lipschitzienne au voisinage de 0 ; il y a (au moins) deux solutions du pb (4) tq $\boxed{x(0) = 0}$.

<u>Solution 1 :</u> $y(t) \equiv 0$; <u>solution 2 :</u> $x(t) = t^2$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = 2t = 2\sqrt{t^2} = 2\sqrt{x}$.
(pour $t \geq 0$)



. <u>Conclusion</u> : si les hypothèses du thm de Cauchy-Lipschitz ne sont pas vérifiées, il <u>peut</u> arriver qu'il n'y ait pas ∃ globale, ou pas unicité de la solution. □

§3 - Stabilité d'un état d'équilibre pour une EDO du premier ordre. Interprétation graphique

Déf. (i) On dit que $x_e \in \mathbb{R}$ est un <u>état d'équilibre</u> pour l'EDO (autonome)

$$\dot{x} = f(x) \qquad (1)$$

si $f(0) = 0$. Alors $x(t) \equiv x_e$ est une solution constante de l'EDO (1).

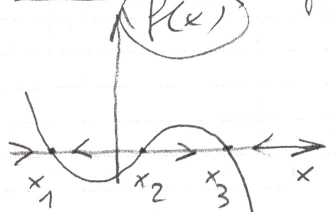
(ii) On dit qu'un état d'équilibre $x_e \in \mathbb{R}$ est <u>stable</u> si pour $r > 0$ assez petit, et pour tout x_0 tq $|x_0 - x_e| < r$, <u>la solution</u> de $\left\{\begin{array}{l}(1)\\ x(0) = x_0\end{array}\right\}$ <u>reste à distance $< r$ de x_e : $\forall t \geq 0$, $|x(t) - x_e| < r$.</u>

(iii) On dit que x_e est <u>asymptotiquement stable</u> si sous les mêmes hypothèses <u>la solution</u> de $\left\{\begin{array}{l}(1)\\ x(0) = x_0\end{array}\right\}$ <u>tend vers x_e (quand $t \to +\infty$)</u> : $x(t) \to x_e$ $(t \to +\infty)$.

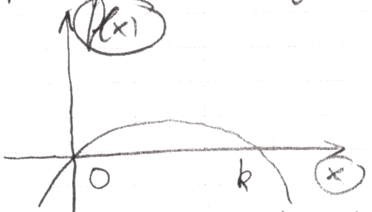
(iv) On dit – cf Ch. 1 – que x_e est "<u>globalement stable</u>" si <u>toute solution</u> de (1) <u>tend vers x_e (quand $t \to +\infty$)</u> : $x(t) \to x_e$ $(t \to +\infty)$ (même si x_0 est loin de x_e).

(v) On dit que x_e est <u>instable</u> s'il <u>n'est pas stable</u>(!)

. <u>Illustrations graphiques</u> : regardez le signe de $\dot{x} = f(x)$



x_1 et x_3 sont .... stables,
x_2 est instable



$f(x) = x(k - x)$, $(k > 0)$

0 est ....

k est ....

§4 - E.D.O. linéaires du second ordre

C'est presque la même théorie que pour les E.D. On considèrera seulement le cas à coefficients constants :

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = \begin{cases} f(t) & \text{(éq. inhomogène)} \quad (1) \\ 0 & \text{(éq. homogène associée)} \quad (1') \end{cases}$$

thm 3 : [(*) signifie que le même résultat est vrai si (1) est linéaire à coefficients non constants]

(1) La SG de (1) est somme d'une SP de (1) et de la SP de (1'). (*).

(2) L'ensemble E des fonctions $\{t \mapsto x(t)\}$ solutions de l'EDO linéaire homogène (1') est un e.v. (espace vectoriel) de dimension 2. (*)

(2') Dans le cas à coefficients constants, on trouve une base de E en cherchant les solutions $\boxed{x(t) = e^{\lambda t}}$. On obtient l'éq. caractéristique

$$\boxed{\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0} \qquad \text{(EC)}$$

Il y a 3 cas

(i) si les racines λ_1, λ_2 de (EC) sont réelles distinctes, alors la SG de (1') est

$$x(t) = a\, e^{t\lambda_1} + b\, e^{t\lambda_2}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

(ii) si λ_1, λ_2 sont distinctes et complexes conjuguées, alors la SG est encore

$$x(t) = a\, e^{t\lambda_1} + b\, e^{t\lambda_2} \in \mathbb{C}, \quad \forall a, b \in \mathbb{C},$$

mais il vaut mieux l'écrire, si $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$x(t) = e^{\alpha t}(A \cos \beta t + B \sin \beta t), \quad \forall A, B \in \mathbb{R}$$

ou

$$x(t) = e^{\alpha t} . C \cos(\beta t + \theta_0), \quad \forall C, \theta_0 \in \mathbb{R}.$$

(iii) si $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2} \in \mathbb{R}$, la SG de (1') est

$$x(t) = e^{\lambda_1 t}(At + B), \quad \forall A, B \in \mathbb{R}$$

Dém. copier la démonstration du Ch 1 pour les ED linéaires du second ordre, à coefficients constants.

N ATTENTION, cf p5. Au Ch. 1 $\{t \mapsto (t)^{\lambda}\}$. Ici, $\{t \mapsto e^{\lambda t}\}$

Thm 4 : Sous les hypothèses du Thm 3, si $f(t) \equiv c$ est constant, et si $a_0 \neq 0$, $\exists$ un unique état d'équilibre $x_e = \frac{c}{a_0}$ pour l'éq. inhomogène (1') et dans ce cas x_e est asymptotiquement stable ssi les racines λ_1, λ_2 de (EC) vérifient :

$$Re(\lambda_1) < 0 \text{ et } Re(\lambda_2) < 0,$$

et dans ce cas x_e est globalement stable.

Dém. La SG de (1) est donc

$$x(t) = \frac{c}{a_0} + \begin{cases} a\, e^{t\lambda_1} + b\, e^{t\lambda_2}, \text{ si } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \neq \lambda_2, \\ e^{t\lambda_1}(At + B), \text{ si } \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ e^{\alpha t}\, C\cos(\beta t + \theta_0), \text{ si } \lambda_1 = \overline{\lambda_2},\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases}$$

Dans les trois cas, quels que soient les coefficients, $\left(x(t) - \frac{c}{a_0}\right) \xrightarrow[(t \to +\infty)]{} 0$ ssi λ_1, λ_2 ou $Re(\lambda_1), Re(\lambda_2) < 0$.

Rem. Si on demande seulement que x_e soit stable, alors la CNS (condition nécessaire et suffisante) devient : $\{Re(\lambda_i) \leq 0$ et si $Re(\lambda_i) = 0$, alors λ_i est racine simple de (EC)$\}$, pour $i = 1, 2$.

Cette condition évite des solutions $t \mapsto t e^{\lambda_i t}$, avec $Re(\lambda_i) = 0$, qui sont non bornées. □

Rem. On verra en TD des exemples de systèmes d'EDO non linéaires.