# Introduction aux Systèmes dynamiques pour l'économie, la biologie et...

## Ch. 1. Généralités. Le Thm de Cauchy-Lipschitz.

### §1. Motivations. Exemples de questions

. Etudier la dynamique d'un phénomène, par opposition à l'étude des états stationnaires (états "d'équilibre", stable, instable ?...). Donc, étudier les phénomènes transitoires, leur comportement quand le temps $t \to \pm\infty$.

. Exemples : est-ce que la solution $x(t) \to$ un état d'équilibre $x^*$ quand $t \to +\infty$ ? est-ce qu'elle oscille autour de $x^*$ ? S'il y a plusieurs états d'équilibre, quels sont leurs bassins d'attraction (ou de répulsion) ?...

. Etude locale près d'un point d'équilibre : étude du système linéarisé, stabilité (non) linéaire, étude locale des trajectoires

. Dépendance continue de la solution / aux données initiales (continuité du flot) ? / à un paramètre (bifurcations) ?

. Systèmes dissipatifs, flots de gradients, fonction de Lyapunov... Au contraire, systèmes conservatifs, hamiltoniens, $\exists$ de solutions périodiques ?...

. Systèmes dynamiques discrets... Liens avec un système continu. Ex : approximation numérique d'un syst. dynamique.

. Trajectoires homoclines ou hétéroclines ... Systèmes à $N$ particules, $N \to +\infty$.... Liens avec certaines EDP...

. On étudiera, au moins sur qlq exemples, les points soulignés

* * *

## §2 - Le pb de Cauchy pour un système différentiel.

On se donne :

A) Un système d'éq. diff. ordinaires (EDO) d'ordre 1 : [(cf p3)]

$$\dot{x}(t) := \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)), \quad t := \text{temps}, \qquad (1)$$

où la solution : $\{x : t \mapsto x(t)\}$ est une fonction inconnue, à valeurs dans $\mathbb{R}^N$

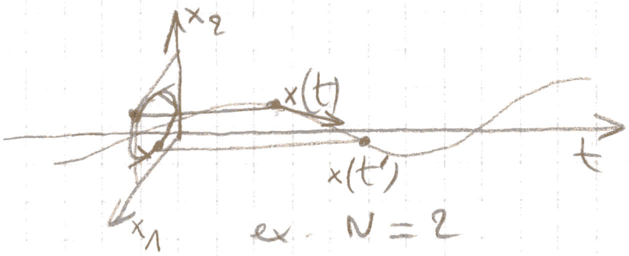
$$x(t) := (x_1(t), \dots, x_N(t)) \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{domaine ouvert}}}{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^N .$$

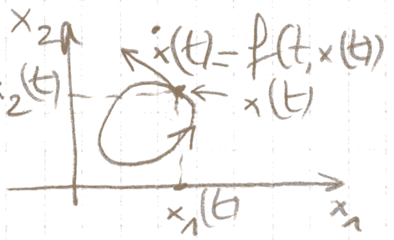
[Exemple : $N = 1$, $\Omega = ]a,b[$ intervalle ouvert $\subseteq \mathbb{R}$.
C'est le cas scalaire.]

- Dans le système d'EDO (1), la fonction
$f : (t,x) := (t, x_1, \dots, x_N) \mapsto f(t,x) := (f_1(t,x), \dots, f_N(t,x))$
est donnée. On la suppose aussi régulière que nécessaire / à $x$, ($\forall t$ fixé) et au moins continue / à $(t,x)$, cf plus loin.

- On dit que la fonction $x(\cdot)$ est solution du système (1) sur un intervalle de temps $I \subseteq \mathbb{R}$ si $x(\cdot)$ est au moins $C^1$ et vérifie : $\forall t \in I$, $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ (1)

- Interprétation géométrique : Soit $x(\cdot)$ une solution de (1) sur $I \subset \mathbb{R}$. Le point $(t, x(t))$ décrit une courbe dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^N_x$, appelée courbe intégrale du système (1). Il y en a en général une infinité




La projection de chaque courbe intégrale sur l'espace $\mathbb{R}^N_x$ peut être vue comme la trajectoire d'un point matériel $M(t) := (x_1(t), \dots, x_N(t))$, de vecteur vitesse $\dot{M}(t) = \dot{x}(t) \in \mathbb{R}^N$ tangent à la trajectoire au point $M(t)$, et l'application $\{ \underset{\substack{\cap \\ I}}{t} \mapsto x(t) := (x_1(t), -, x_N(t)) \}$ est une représentation paramétrique de la trajectoire. Exemple: pour $N=2$, considérons:

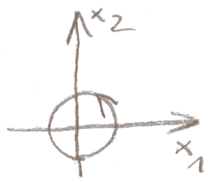
$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \text{ avec } \begin{cases} f_1(t, x_1, x_2) = -x_2 \\ f_2(t, x_1, x_2) = +x_1 \end{cases} \qquad (2)$$

et

$$\dot{y}(t) = g(t, y(t)), \text{ avec } \begin{cases} g_1(t, x_1, x_2) = -2x_2 \\ g_2(t, x_1, x_2) = -2x_1 \end{cases} \qquad (2')$$

ces deux systèmes d'EDO admettent respectivement pour solutions $x(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $\forall r \geq 0$

et $y(t) = (r'\cos 2t, r'\sin 2t)$, $\forall r' \geq 0$.




Pour $r = r'$, les trajectoires sont les $\overline{m}$, mais le mobile $N(t) = (y_1(t), y_2(t))$" tourne 2 fois plus vite que $M(t) = (x_1(t), x_2(t))$.

Rem. • Dans un système comme (2) ou (2'), le temps $t$ n'intervient pas explicitement. Il n'intervient que via la solution (inconnue) $x(t)$. On dit que (2) ou (2') est un système autonome: la dynamique ne dépend pas de l'instant de départ: invariance par translation en temps.

• On dit qu'un système diff. comme (1) est du premier ordre, car il ne contient que des dérivées d'ordre $\leq 1$. Un système diff. d'ordre $m \geq 1$ peut se ramener à un système diff. du 1er ordre dans $\mathbb{R}^{m \cdot N}$. Par exemple, pour $N=1$, l'éq. diff.

$$\ddot{y}(t) := \frac{d^2y}{dt^2}(t) = f(t, y(t), \dot{y}(t)), \qquad (3)$$

où $y(t) \in \mathbb{R}^N$, avec $N=1$,

se ramène à l'étude du système

$$\dot{Y}(t) = F(t, Y(t)), \qquad (4)$$

avec $Y(t) = (y_1(t), y_2(t))$, $F(t,Y) := \begin{cases} F_1(t, Y_1, Y_2) := f(t, Y_1, Y_2), \\ F_2(t, Y_1, Y_2) := Y_2 \end{cases}$, $\qquad (5)$

cf TD.

• En général, on a vu avec (2) ou (2') qu'un système diff. d'ordre $m \geq 1$ admet une infinité de solutions. Pour avoir une solution unique, il faut ajouter $m$ "conditions initiales". $\square$

B). On impose donc, pour un système du 1er ordre :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^N, \; t \in I \subset \mathbb{R} \quad (1)$$

une "condition initiale" à un instant $t_0 \in I$

$$x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^N \qquad (6)$$

Dans les bons cas, le système $\left\{\begin{matrix}(1)\\(6)\end{matrix}\right\}$ admet une unique solution, i.e. $\exists$ une unique solution de (1) : $\{t \mapsto x(t)\}$, telle que $x(t_0) = x_0$ (6).

Autrement dit, $\exists$ une unique solution de (1) passant au point $x_0$ à l'instant $t_0$.

• Pour un système (ou une éq. si $N=1$) d'ordre $m$, on remplace (6) par la donnée de la valeur de la solution et de ses $(m-1)$ premières dérivées en $t = t_0$ :

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^N \\ \dot{x}(t_0) = x_1 \in \mathbb{R}^N \\ \vdots \\ x^{(m-1)}(t_0) = x_{m-1} \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (m \text{ conditions dans } \mathbb{R}^N). \qquad (7)$$

Exemple : Pour l'éq. scalaire du second ordre (3), on impose $(y(t_0), \dot{y}(t_0)) = Y(t_0) := Y_0 := (y_0, y_1)$, $\qquad (8)$

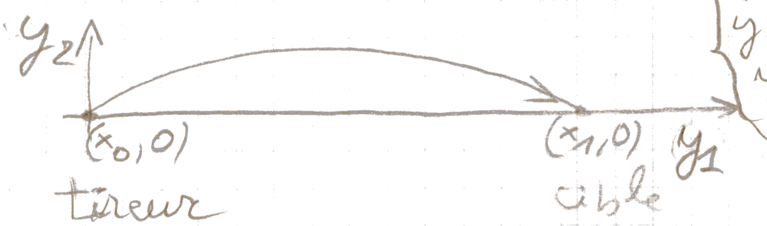
i.e. la position initiale et la vitesse initiale.

Rappel : $\ddot{y}(t)$ est l'accélération. $\square$

**Déf.** Pour un système du premier ordre (1), on appelle **Pb de Cauchy** (ou : Pb diff. à conditions initiales) le pb (1)(6)

**Rem.** La condition "initiale" peut être en fait "finale" (si $I = ]a, t_0]$)! le point important est que dans (6) toutes les relations entre vecteurs de $\mathbb{R}^N$ sont prises au MÊME INSTANT $t_0$.

• Si ce n'est pas le cas, on parle alors de Pb aux limites : nous ne traiterons pas ce genre de pb. Exemple : pb du tir




$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = f(y(t), \dot{y}(t)) \\ y(t_0) = (x_0, 0), \\ y(t_1) = (x_1, 0); \end{cases}$$

$(x_0, x_1)$ données
$t_0$ connu
$t_1$ inconnu

## §3- ∃ et unicité de la solution. Thm de Cauchy-Lipschitz

**Thm 1: Cauchy-Lipschitz (***) Version globale**

(i) On considère le pb de Cauchy

(EDO) $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, (1)

(CI) $x(t_0) = x_0$, $t_0$ donné qlq $\in \mathbb{R}$, $x_0$ donné qlq $\in \mathbb{R}^N$. (6)

(ii) On suppose que $f : (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow f(t,x) \in \mathbb{R}^N$ est continue (***) et Lipschitzienne / à $x$, unif$^{t}$ / à $t$ (***):

$$\exists L > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^N, \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L \|x - y\|, \quad (9)$$

où $\|\cdot\|$ est une norme (***) qlq sur $\mathbb{R}^N$,

[e.g. $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right)^{1/2} = \|x\|_2$, ou $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq N} |x_i| = \|x\|_\infty$, où $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i|$ ou ...]

Thm 1 : Cauchy-Lipschitz (version globale, suite)

Alors $\exists$ une unique solution de (1) (6), de classe $C^1$, définie globalement sur $\mathbb{R}$. De plus, deux solutions $x$ et $y$ de (1) respectivement associées à (6) et

$y(t_0+h) = y_0$ (6')

vérifient si $h=0$ : (***)

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \|y(t)-x(t)\| \leq e^{L|t-t_0|}\|y_0-x_0\|, \qquad (10)$$

et si $h \neq 0$ :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \|y(t)-x(t)\| \leq e^{L(|t-t_0|+|h|)}\|y_0-x_0\| + \varepsilon(h,y_0,t), \qquad (11)$$

où $\varepsilon(h,y_0,t) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ : continuité du flot, cf ci-dessous

- Dém.. Point fixe d'une application contractante
  - On construit une solution (unique) sur un petit intervalle $[t_0, t_0+\Delta t]$, avec $\boxed{\Delta t . L := C < 1}$
  - On recommence sur $[t_1, t_1+\Delta t] := [t_0+\Delta t, t_0+2\Delta t]$, intervalle de m̄ longueur, etc...
  - On construit ainsi une solution unique sur $[t_0, +\infty[$ (et de m̄ sur $]-\infty, t_0]$)
  - Sur $[t_0, t_1)$, on pose $|||x(\cdot)||| := \sup_{t\in[t_0,t_1]} \underbrace{\|x(t)\|}_{\text{norme sur } \mathbb{R}^N}$

  Alors $x$ est solution de (1) (6) sur $[t_0,t_1]$ ssi $\forall t \in I$,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds := (\mathcal{F}(x))(t) \qquad (12)$$

On pose alors $x^0 := x_0$ et $x^{k+1}(t) := (\mathcal{F}(x^k))(t)$ ($0, k, k+1$ sont des indices supérieurs).

Alors

$$|||x^{k+1}(\cdot) - x^k(\cdot)||| = \sup_{t\in[t_0,t_1]} \|x^{k+1}(t)-x^k(t)\| = \text{d'après (12)}$$

$$= \sup_{t\in[t_0,t_1]} \left\| \int_{t_0}^{t} \left( f(s,x^k(s)) - f(s,x^{k-1}(s)) \right) ds \right\|$$

$\leq \int_{t_0}^{t} L \, \| x^k(s) - x^{k-1}(s) \| \, ds = \underbrace{L |t - t_0|}_{\leq \boxed{L\Delta t := C < 1}} \cdot ||| x^k(\cdot) - x^{k-1}(\cdot) |||$, $\forall t \in [t_0, t_1]$ (13)

d'après (9)

. Finalement, en ayant choisi $\Delta t > 0$ assez petit, on a :

$\forall k$, $||| x^{k+1}(\cdot) - x^k(\cdot) ||| \leq C \, ||| x^k(\cdot) - x^{k-1}(\cdot) ||| \leq \cdots$

$\leq C^k \, ||| x^1 - x^0 |||$, avec $0 < C < 1$

. Donc la série de fonctions $\left\{ t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \left( x^{k+1}(t) - x^k(t) \right) \in \mathbb{R}^N \right\}$ converge pour la norme $||| \cdot |||$ vers une fonction continue $\{ t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^N \}$ sur $[t_0, t_1]$. Par continuité de $f(\cdot, \cdot)$, $x(\cdot)$ vérifie (12), donc est solution de (1)(6) sur $[t_0, t_1]$.

. En faisant le m̄ calcul que dans (13) pour deux solutions éventuelles $x$ et $y$ de (1), (6), on obtient $||| x - y ||| \leq C \, ||| x - y |||$, avec $0 \leq C < 1$. Donc nécessairement $||| x - y ||| = 0 \Rightarrow x = y$. <u>unicité</u>

(*) . On recommence sur $[t_1, t_2] = [t_1, t_1 + \Delta t]$, <u>intervalle de m̄ longueur</u>, car les hypothèses sont vérifiées <u>GLOBALEMENT</u>, cf ci-dessous.

(***)

. Enfin, (10) est conséquence du <u>Lemme de Gronwall</u>, cf ci-dessous, et <u>(11) est admis</u>, cf ci-dessous. □

. <u>Lemme de Gronwall</u> (***) : <u>Version à coeff^ts constants</u>

Soient $a, b > 0$ et $\{ t \mapsto y(t) \geq 0 \}$ une fonction tq

$\forall t$, $\dot{y}(t) \leq a \, y(t) + b$ (14). Alors $\forall t \geq t_0$,

$y(t) \leq \frac{1}{a} \left( a y(t) + b \right) \leq \left( a y(t_0) + b \right) e^{a(t - t_0)}$

<u>Dém. et applications</u>, cf TD. [ Diviser les 2 membres de (14) par $a y(t) + b > 0$ ]

. **Déf.** Flot associé à (1). Supposons qu'on est dans les hypothèses du thm de Cauchy-Lipschitz "global". Alors on appelle indifféremment flot associé à (1) l'application

$$\phi : (t, t_0, x_0) \longmapsto x(t),$$

où $x(\cdot)$ est l'unique solution du pb de Cauchy

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad , \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad , \quad (6)$$

ou l'application

$$\phi_t : (t_0, x_0) \mapsto x(t) \quad , \quad t \text{ fixé qlcq.}$$

L'inégalité (11) entraîne que $\forall t \in \mathbb{R}$ ($|t| < +\infty$), l'application $\phi_t$ est continue : si deux jeux de données initiales $(t_0, x_0)$ et $(t_0 + h, y_0)$ sont proches, alors à tout instant $t$ fini les solutions associées $x(t)$ et $y(t)$ sont "proches"

---

⚠ Ceci est FAUX si les hypothèses du thm de CL (Cauchy-Lipschitz) ne sont pas globales.

. thm 2 : CL (version locale) ***

(i) Comme au thm 1, on suppose que $f : (t,x) \mapsto f(t,x)$ est continue de $I \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$, $I$ intervalle ouvert, $\Omega$ domaine ouvert $\subset \mathbb{R}^N$, et $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$.

(ii) On suppose que pour toute boule $B(x,r)$ bornée $\subset \Omega$ et pour tout intervalle $J$ borné $\subset I$, on a encore

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L \|x - y\|,$$

mais $L$ dépend de $J$ et de $B$

thm 2 CL (local) suite

(iii) Alors $\exists$ une unique solution $x(\cdot)$ du pb de Cauchy (1), (6), définie <u>localement</u>, i.e. définie sur un voisinage de $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

(iv) Cette solution admet un unique <u>prolongement maximal</u> sur $I \times \Omega$. En particulier, <u>soit</u> cette solution "<u>explose en temps $t^* < +\infty$</u>" :

$\|x(t)\| \xrightarrow[(t \to t^*)]{} +\infty$, <u>soit</u>, pour une suite $(t_n)$, $(t_n, x(t_n)) \to (t^*, x^*)$

et $(t^*, x^*)$ n'est pas dans le domaine de définition de $f$. Il n'y a pas d'autre possibilité : c'est le "<u>thm des bouts.</u>"

(v) Si cette solution maximale est définie sur $[t_0, t^*[$ ou sur $]t^*, t_0]$, l'inégalité (11) (<u>continuité du flot</u>) est encore valable $\forall t \in [t_0, t^*[$ (ou $\forall t \in ]t^*, t_0]$).

Le point important est que dans la méthode de point fixe du thm 1, on construit une solution unique sur $[t_0, t_1]$, puis sur $[t_1, t_2]$ qui est éventuellement de longueur $< t_1 - t_0$, etc... La série $\sum_{i=0}^{+\infty} (t_{i+1} - t_i)$ risque d'être CV, et de somme $t^* < +\infty$. $\square$

On renvoie aux TD pour des illustrations des différents cas.