

Courbes auto-contractantes dans les variétés riemanniennes

Ludovic Rifford

Université de Nice - Sophia Antipolis
&
Institut Universitaire de France

École CIMPA "Géométrie et Analyse"
Université Félix Houphouët-Boigny
Abidjan, Côte d'Ivoire, Mars 2016

Champ de gradients

Soit $M = \mathbb{R}^n$ et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ supposée propre ($\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$). On s'intéresse aux orbites positives du champs $-\nabla f$ c'est à dire aux solutions de

$$\dot{\gamma}(t) = -\nabla f(\gamma(t)) \quad t \geq 0.$$

On a pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{d}{dt} \{f(\gamma(t))\} = \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = -|\nabla f(\gamma(t))|^2$$

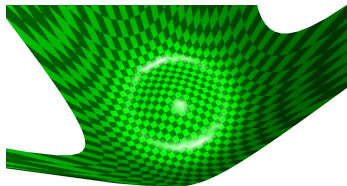
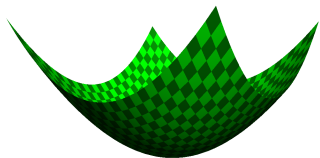
Soit

$$\mathcal{E} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \nabla f(x) = 0\}.$$

Théorème (La Salle)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\gamma(t), \mathcal{E}) = 0.$$

Exemples



Problèmes :

- Limite ?
- Longueur de la courbe $\Gamma = \gamma([0, +\infty))$ finie ou infinie ?

Théorème de Łojasiewicz

Théorème (Łojasiewicz, 1962)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **analytique** telle que $f(0) = 0$, si il existe une suite $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma(t_k) = 0,$$

alors la courbe $\Gamma = \gamma([0, +\infty[)$ est de longueur finie et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = 0$.

Conjecture du Gradient de Thom

La limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}$ existe.

Démontrée par Kurdyka, Mostowski et Parusinski (2000)

Inégalité de Łojasiewicz

Théorème (Inégalité de Łojasiewicz)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction analytique telle que $f(0) = 0$, alors il existe $c > 0$, $\rho \in]0, 1[$ et U un voisinage de 0 tel que

$$|\nabla f(x)| \geq c |f(x)|^\rho \quad \forall x \in U.$$

Preuve de $\text{long}(\Gamma) < \infty$:

$$\frac{d}{dt} \{f(\gamma(t))\} = \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = -|\nabla f(\gamma(t))|^2$$

Donc si $\gamma(t) \in U$, alors on a

$$\implies \frac{d}{dt} \{f(\gamma(t))\} \leq -c |\nabla f(\gamma(t))| |f(\gamma(t))|^\rho$$

$$\implies |\nabla f(\gamma(t))| \leq \frac{-1}{c(1-\rho)} \frac{d}{dt} \left\{ f(\gamma(t))^{1-\rho} \right\}$$

Donc on a **pour tout** $T \geq t_k$ tel que $\gamma([t_k, T]) \in U$,

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^T |\nabla f(\gamma(t))| dt &\leq \frac{1}{c(1-\rho)} \left[f(\gamma(t_k))^{1-\rho} - f(\gamma(T))^{1-\rho} \right] \\ &\leq \frac{1}{c(1-\rho)} f(\gamma(t_k))^{1-\rho}. \end{aligned}$$

En conclusion:

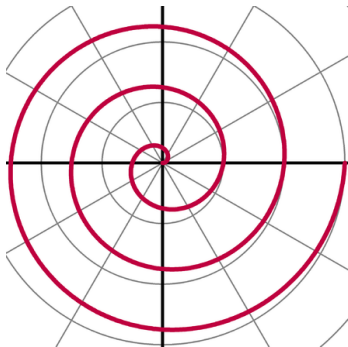
- Si $\gamma(t_k)$ est très proche de 0 alors on ne pourra pas ressortir de U ;
- La courbe Γ est de longueur finie ;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = 0$.



Le cas lisse

Le théorème de Łojasiewicz est faux dans le cas C^∞ !!

On part d'une spirale de longueur infinie ($r = g(\theta)$)



Par le théorème d'extension de Whitney, on trouve une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la spirale est une orbite de $-\alpha(x)\nabla f(x)$ ($\alpha > 0$).

Le cas convexe

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , **convexe**, propre.

L'inégalité de Łojasiewicz est fautive pour les fonctions convexes (ainsi que la conjecture de Thom).

Soit $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de

$$\dot{\gamma}(t) = -\nabla f(\gamma(t)) \quad t \geq 0.$$

Lemma

Pour tout $t \geq 0$, la fonction $s \in [0, t] \mapsto |\gamma(s) - \gamma(t)|$ est décroissante.

Preuve du lemme : On a pour tous $t, s \geq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} |\gamma(s) - \gamma(t)|^2 &= 2\langle \dot{\gamma}(s), \gamma(s) - \gamma(t) \rangle \\ &= \langle \nabla f(\gamma(s)), \gamma(t) - \gamma(s) \rangle. \end{aligned}$$

Courbes auto-contractantes

Si $s \in [0, t]$, $\gamma(t)$ appartient au sous-ensemble de niveau $\{f \leq f(\gamma(s))\}$ et par convexité :



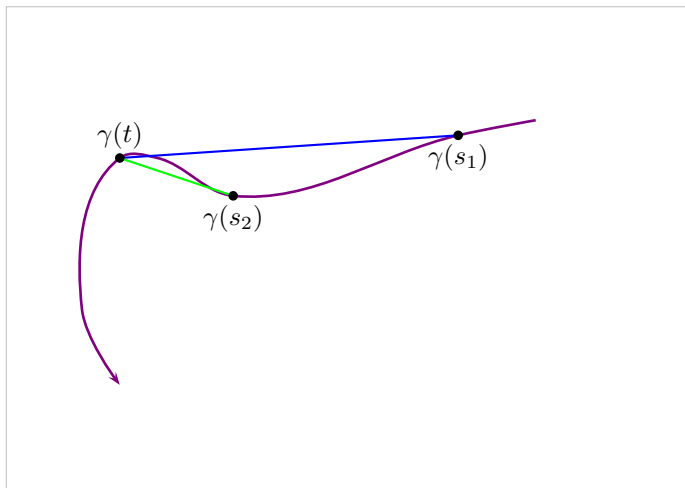
Definition (Daniilidis, Ley, Sabourau)

Soit $I = [0, b) \subset \mathbb{R}$, une courbe $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite auto-contractante si pour tout $t \in I$, la fonction

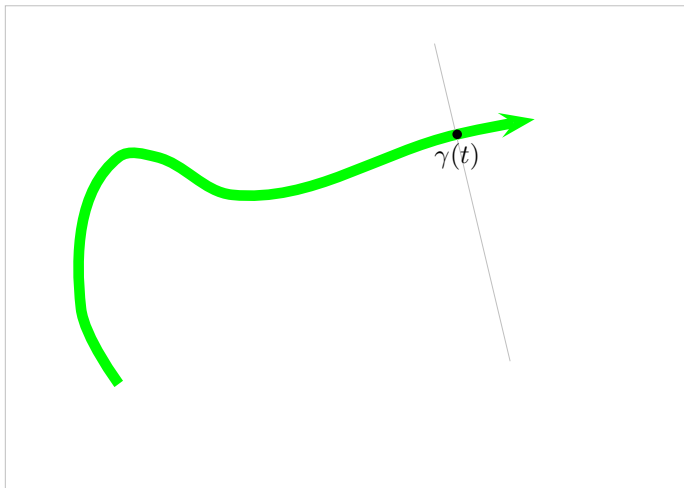
$$s \in [0, t] \mapsto |\gamma(s) - \gamma(t)|$$

est décroissante.

Courbes auto-contractantes



Serpent à lunettes auto-phobique



Courbes auto-contractantes

Remarque

Toute courbe associée à une fonction quasiconvexe lisse ou à un feuilletage convexe lisse est auto-contractante.

Remarque

Une courbe auto-contractante n'est pas forcément continue.

Théorème (David, Daniilidis, Durand-Cartagena, Lemenant)

Soit $I = [0, b) \subset \mathbb{R}$ et une courbe $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ contenue dans une boule de rayon $R > 0$. Alors

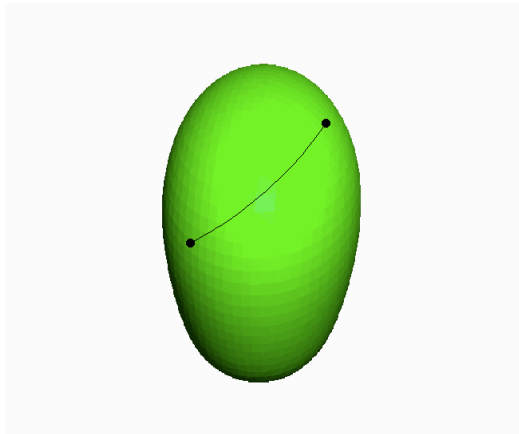
$$\text{long}(\Gamma) \leq C_n R,$$

(où C_n est une constante ne dépendant que de la dimension n).

D'après une idée de Manselli-Pucci (1991).

Le cas riemannien

Soit M une variété lisse connexe de dimension n équipée d'une métrique riemannienne g (complète). Pour tout $x, y \in M$, on définit la **distance géodésique** entre x et y , notée $d^g(x, y)$, comme le minimum des longueurs des courbes joignant x à y .



Le théorème riemannien

Definition

Soit $I = [0, b) \subset \mathbb{R}$, une courbe $\gamma : I \rightarrow M$ est dite auto-contractante si pour tout $t \in I$, la fonction

$$s \in [0, t] \longmapsto d^g(\gamma(s), \gamma(t))$$

est décroissante.

Théorème (Daniilidis, Deville, Durand-Cartagena, R)

Soit $I = [0, b) \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{K} \subset M$ un ensemble compact et $\gamma : I \rightarrow \mathcal{K}$ une courbe auto-contractante, alors l'ensemble $\Gamma = \gamma(I)$ est rectifiable de longueur finie.

Idée de preuve dans \mathbb{R}^n

Soit $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe auto-contractante contenue dans la boule $B(0, R)$ **supposée lisse**.

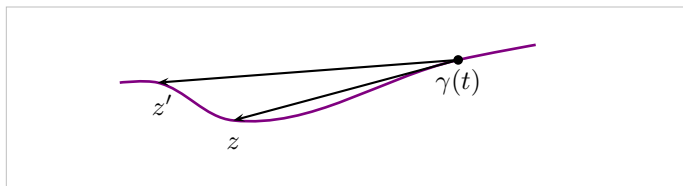
On définit pour tout $t \geq 0$,

$$\Gamma(t) := \{\gamma(s) \mid s \geq t\}.$$

Lemma

Pour tout $t \geq 0$, pour tous $z, z' \in \Gamma(t)$, on a

$$\langle z - \gamma(t), z' - \gamma(t) \rangle \geq 0.$$



Idée de preuve dans \mathbb{R}^n

Preuve du lemme : On a par hypothèse ($z' > z$)

$$|z - z'|^2 \leq |\gamma(t) - z'|^2.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} |z - \gamma(t)|^2 + |\gamma(t) - z'|^2 + 2\langle z - \gamma(t), \gamma(t) - z' \rangle \\ \leq |\gamma(t) - z'|^2 \end{aligned}$$

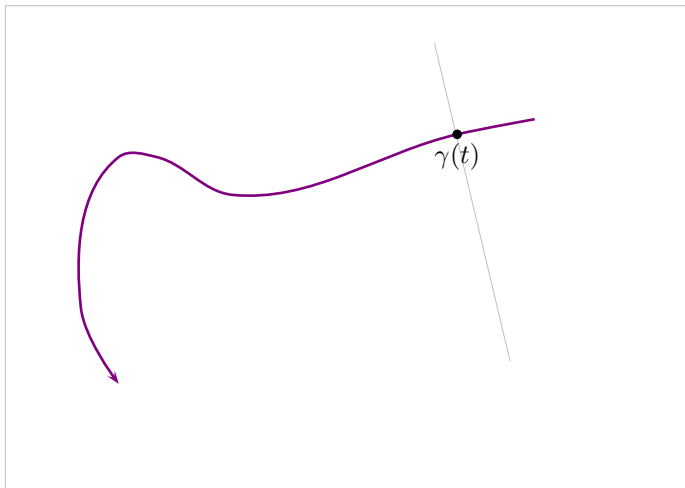
$$\implies 2\langle \gamma(t) - z, \gamma(t) - z' \rangle \geq |z - \gamma(t)|^2 \geq 0.$$

□

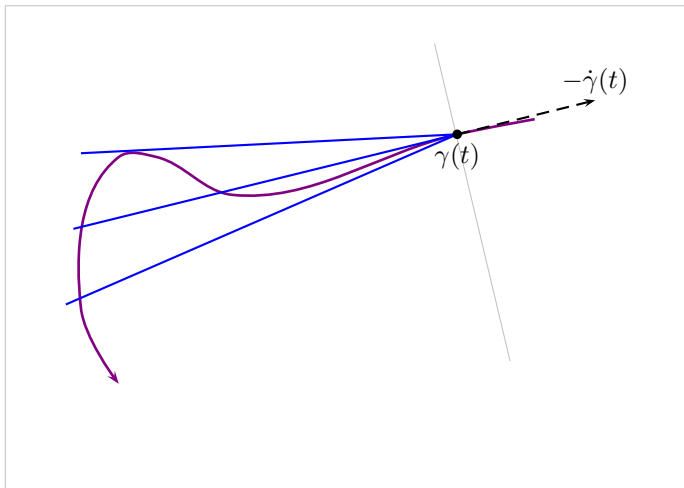
Remarque

Si un cône dans \mathbb{R}^n contient des vitesses ayant deux à deux un produit scalaire ≥ 0 , alors il est pointu !!!

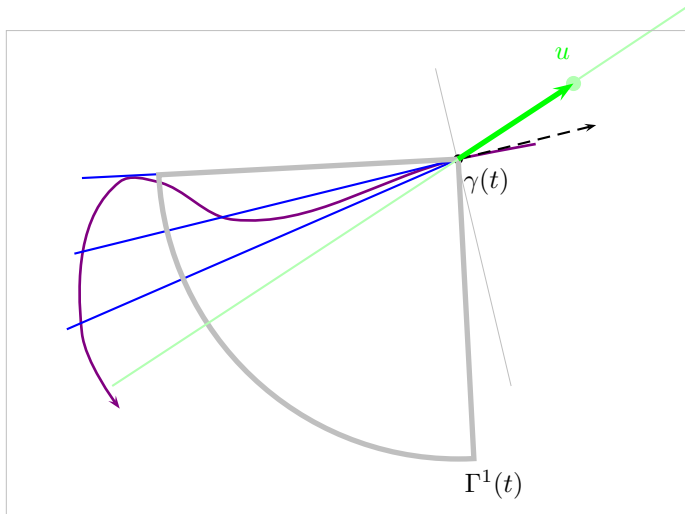
Idée de preuve dans \mathbb{R}^n



Idée de preuve dans \mathbb{R}^n



Idée de preuve dans \mathbb{R}^n



Idée de preuve dans \mathbb{R}^n

- Pour tout $t \geq 0$, il existe $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ tel que

$$\langle u, -\dot{\gamma}(t) \rangle \geq 1/10 \quad \text{et} \quad \langle u, \Gamma^1(t) \rangle \leq -1/10.$$

- Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact convexe fixé. Pour tout vecteur unitaire $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ la **projection orthogonale** $P_u(K)$ de K sur la droite $\mathbb{R}u$ est intervalle compact de longueur $\mathcal{L}^1(P_u(K))$.
- Par conséquent, la fonction **largeur moyenne** de $\overline{\Gamma(t)}$ définie par

$$W(t) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{L}^1 \left(P_u \left(\overline{\Gamma(t)} \right) \right) du.$$

a une dérivée $\leq -c < 0$.

- **Mais $W > 0$ et $W(+\infty) < R$!!!!**

Idée de preuve dans \mathbb{R}^n

- Pour tout $t \geq 0$, il existe $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ tel que

$$\langle u, -\dot{\gamma}(t) \rangle \geq 1/10 \quad \text{et} \quad \langle u, \Gamma^1(t) \rangle \leq -1/10.$$

- Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact convexe fixé. Pour tout vecteur unitaire $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ la **projection orthogonale** $P_u(K)$ de K sur la droite $\mathbb{R}u$ est intervalle compact de longueur $\mathcal{L}^1(P_u(K))$.
- Par conséquent, la fonction **largeur moyenne** de $\overline{\Gamma(t)}$ définie par

$$W(t) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{L}^1 \left(P_u \left(\overline{\Gamma(t)} \right) \right) du.$$

a une dérivée $\leq -c < 0$.

- **Mais $W \geq 0$ et $W(+\infty) < R$!!!!**

- On a passé sous le tapis de nombreux détails techniques.
- Dans (M, g) , on ne peut pas adapter la notion de largeur moyenne. **Il faut localiser !!!**
- Celà revient à étudier des serpents auto-phobiques sans lunettes avec oeilères.

Merci pour votre attention !!